§ 3. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ГРУПП

В этом параграфе мы ограничимся тем, что опишем геометрически операции каждой группы. Для полного изучения какой-либо конкретной группы читателю следует обратиться к стереопроекции на рис. 9.1 и определить геометрически произведение любой пары операций группы, построив таким образом таблицу произведений. В § 4 мы остановимся на разбиении элементов по классам. Рассмотрим прежде всего группы, содержащие лишь собственные вращения.

А. Собственные группы

Группы C_n

Простейшие точечные группы, которые мы можем построить, обладают одной осью симметрии n-го порядка для собственных вращений. Эти группы являются абелевыми порядка n, поскольку вращения вокруг одной оси коммутируют друг с другом. Они являются также циклическими, так как образованы одним элементом C_n и его степенями C_n^2, C_n^3, . . ., $C_n^n = E$.

Группы диэдра D_n

Единственный способ, которым можно добавить еще одну ось симметрии к группе C_n без того, чтобы образовались новые оси симметрии порядка n (в дополнение к имеющейся оси C_n), состоит в добавлении горизонтальной оси второго порядка. Согласно правилу 2 из § 1, это приводит к появлению $n-1$ других горизонтальных осей второго порядка. Группу D_2, имеющую в точности три взаимно перпендикулярные оси второго порядка, иногда обозначают через V. Группа D_1 не является новой, так как это просто группа C_2, у которой ось симметрии горизонтальна.

Выше говорилось, что любая другая собственная точечная группа должна иметь две или более осей порядка n; выясним теперь, какие из них действительно возможны, рассмотрев группу с несколькими осями порядка n, пересекающимися в центре сферы. Если отметить на сфере точки P_i, в которых оси n-го порядка пересекают ее, то

в силу n-кратной вращательной симметрии относительно любой из осей точки P_i будут вершинами правильного многогранника (полиэдра). Если теперь соединить соседние точки P_i сегментами больших кругов на поверхности сферы (ребрами), то мы получим на ней некоторую «сеть». На рис. 9.2 изображено подобное построение для случая десяти осей третьего порядка. Имеется замечательная геометрическая теорема, доказанная Эйлером, о соотношении между числом вершин В, числом ребер Р и числом граней Г у построенной геометрической фигуры. Согласно этой теореме,

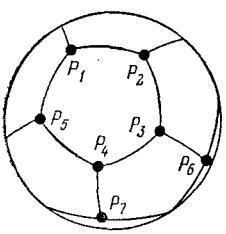

Рис. 9.2

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2. \qquad (9.1)$$

Кроме того, следует учесть, что каждое ребро имеет на своих концах по две вершины, а в каждой вершине пересекается n ребер, так что $\text{Р} = n\text{В}/2$. Если обозначить число ребер каждой грани через s, то, учитывая, что каждое ребро принадлежит двум граням, мы получим также $\text{Р} = \Gamma s/2$, откуда $n\text{В} = \Gamma s$. Теперь можно переписать равенство (9.1) в виде

$$\frac{\Gamma s}{n} - \frac{\Gamma s}{2} + \Gamma = 2 \qquad (9.2)$$

или

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\Gamma s}.$$

Поскольку величина Γs положительна, отсюда следует ограничение

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}. \qquad (9.3)$$

При $n=2$ из (9.2) следует, что $\Gamma=2$, и нетрудно сообразить, что подобная процедура просто удвоит рассмотренные выше группы диэдра. При $n>2$ мы получим возможности, перечисленные в табл. 9.1, где приведены также соответствующие значения Г, В и Р. В последнем столбце таблицы указаны названия правильных многогранников, образуемых точками P_i в каждом случае. При $n \geqslant 6$ получаем $s=2$, и это вновь приводит нас к группам диэдра. Полные группы симметрии для каждого

Таблица 9.1

n	s	Г	В	Р	Многогранник
3	3	4	4	6	Тетраэдр
3	4	6	8	12	Куб
3	5	12	20	30	Додекаэдр
4	3	8	6	12	Октаэдр
5	3	20	12	30	Икосаэдр

из этих случаев будут включать помимо осей вращения n-го порядка и другие элементы симметрии, о которых будет сказано ниже. Таблицы характеров этих групп приведены в приложении 1 (т. 1).

Группа тетраэдра T

Согласно первой строке табл. 9.1, через вершины тетраэдра, как показано на рис. 9.3, проходят четыре оси третьего порядка. Очевидно, что произведение вра-

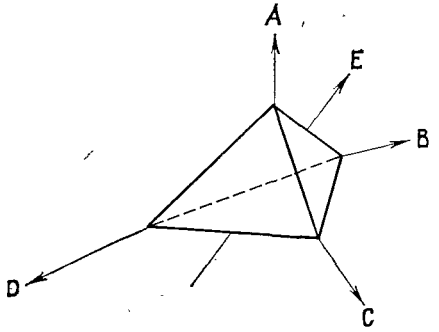

Рис. 9.3

щений вокруг осей третьего порядка эквивалентно вращениям вокруг осей второго порядка, проходящих через центры противоположных ребер тетраэдра. Например, если за поворотом на угол $2\pi/3$ вокруг оси C на рис. 9.3

последует поворот на угол $-2\pi/3$ вокруг «вертикальной» оси A, то это приведет к перестановке между собой пар осей A и B, C и D. Такой комбинированный поворот эквивалентен повороту вокруг оси второго порядка E. Никаких других поворотов при этом не возникает, так что группа T является по существу набором собственных операций, преобразующих в себя правильный тетраэдр.

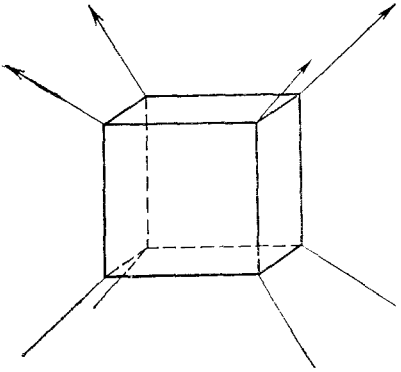

Рис. 9.4

Группа октаэдра *O*

Согласно второй строке таблицы 9.1, через противоположные вершины куба (рис. 9.4) проходят оси вращений третьего порядка. Полная группа симметрии, как и ранее в случае тетраэдра, будет включать в себя все собственные операции, преобразующие куб в себя, так как именно эти операции переводят друг в друга оси четвертого порядка. Новыми элементами являются повороты вокруг осей четвертого порядка, проходящих через центры противоположных граней, и вокруг осей второго порядка, проходящих через центры противоположных ребер.

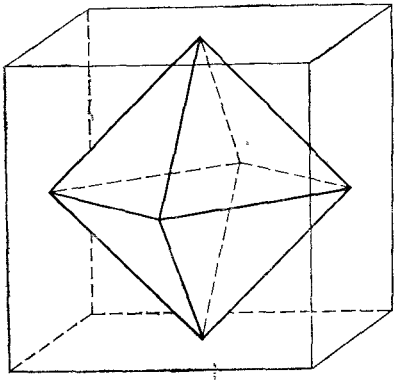

Рис. 9.5

Та же группа элементов симметрии получается, если начать с четвертой строки табл. 9.1, соответствующей октаэдру; при этом никакие новые элементы симметрии не возникают. На рис. 9.5 изображен октаэдр, вписанный в куб, что наглядно демонстрирует эквивалентность их симметрий; по этой причине группа носит название группы октаэдра.

Группа икосаэдра Y

Группа, соответствующая третьей строке табл. 9.1, обладает осями вращений третьего порядка, проходящими так, как показано на рис. 9.6. Полная группа симметрии содержит вновь все собственные операции, преобразующие

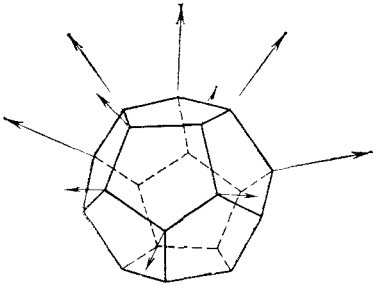

Рис. 9.6

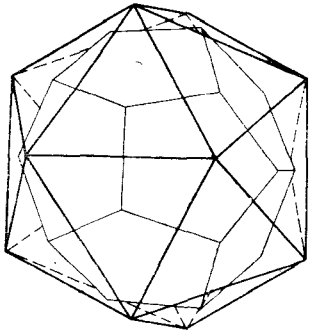

Рис. 9.7

додекаэдр в себя. Новыми элементами являются повороты вокруг осей пятого порядка, проходящих через центры противоположных граней, и осей второго порядка, проходящих через середины противоположных ребер додекаэдра.

Как и ранее, та же группа симметрии получится, если начать с икосаэдра (пятая строка табл. 9.1); на рис. 9.7 изображен додекаэдр, вписанный в икосаэдр.

Б. Несобственные группы

Несобственные группы образуются путем добавления несобственного элемента S_n к описанным выше собственным группам. Это должно быть сделано так, чтобы не возникало ни одного нового собственного вращения, во избежание удвоения группы. В случае групп C_n, обладающих единственной осью собственных вращений, можно добавить в качестве несобственного элемента отражение в горизонтальной или вертикальной плоскости, не приводящее ни к какому собственному вращению. Так могут быть получены две новые точечные группы C_{nh} и C_{vn}.

Группы C_{nh}

Эти группы образуются добавлением отражения в горизонтальной плоскости σ_h к группе C_n. Они содержат в качестве элемента инверсию, если порядок n четный, так как при этом $\mathsf{C}_n^{1/2n}\sigma_h = \mathsf{I}$.

Группы C_{nv}

Эти группы образуются добавлением отражения в вертикальной плоскости σ_v к группе C_n, что автоматически ведет к появлению n вертикальных плоскостей зеркального отражения. Разумеется, между группами C_{1h} и C_{1v} нет никакого различия, так как каждая из них содержит лишь по одному отражению и единичному элементу.

Группы S_{2n}

В частном случае к группе C_1 (сводящейся просто к единичному элементу) можно добавить любой из элементов S_p и получить группу S_p с единственной осью порядка p для зеркальных поворотов. При этом, однако, группы S_p с нечетным p тождественны группам C_{ph}, так как они содержат C_p и σ_h в качестве элементов. Это доказывается тем, что $\mathsf{S}_p^{p+1} = (\mathsf{C}_p\sigma_h)^{p+1} = \mathsf{C}_p{}^{p+1}\sigma_h^{p+1} = \mathsf{C}_p$ при нечетных p, и, следовательно, группа C_p включена в S_p. Аналогично $\mathsf{S}_p^p = (\mathsf{C}_p\sigma_h)^p = \mathsf{C}_p^p\sigma_h^p = \sigma_h$ при нечетных p, а значит, σ_h также содержится в S_p. В случае четных $p = 2n$ (n целое) образуется новая группа S_{2n}. При этом, если n нечетное, группа S_{2n} содержит в качестве своего элемента также инверсию, поскольку $\mathsf{S}_{2n}^n = \mathsf{C}_{2n}^n\sigma_h^n = \mathsf{C}_2\sigma_h = \mathsf{I}$; в частности, группа S_2 содержит только единичный элемент E и инверсию I. Группы S_{2n} являются циклическими группами порядка $2n$ и состоят из элементов $\mathsf{S}_{2n}, \mathsf{S}_{2n}^2, \ldots, \mathsf{S}_{2n}^{2n} = \mathsf{E}$.

В случае групп D_n можно аналогичным образом добавлять горизонтальные и вертикальные плоскости отражения.

Группы D_{nh}

Эти группы образуются добавлением отражения в горизонтальной плоскости σ_h к группам D_n; согласно

правилу 3 из § 1, в этом случае должны существовать также вертикальные плоскости отражения, содержащие все n горизонтальных осей второго порядка.

Группы D_{nd}

Эти группы образуются добавлением отражения в вертикальной плоскости σ_v, причем эта плоскость делит пополам угол между двумя соседними горизонтальными осями второго порядка. Дополнительные $n-1$ плоскостей этого типа образуются, конечно, вращением на углы, кратные $2\pi/n$; соответствующие отражения обозначаются через σ_d, где индекс d, как и в обозначении D_{nd}, означает «диагональный». Эти группы можно рассматривать как результат добавления «горизонтальной» оси второго порядка к группам S_{2n}.

Рассмотрим далее несобственные группы, образованные из групп T, O, Y добавлением несобственных элементов.

Полная группа тетраэдра T_d

Она включает в себя все собственные и несобственные операции, преобразующие тетраэдр в себя; эта группа образуется добавлением к группе T плоскостей отражения, проходящих через пары вершин тетраэдра и середину противоположного ребра. Существование шести таких плоскостей отражения, перпендикулярных осям второго порядка, означает наличие шести зеркальных поворотов S_4 вокруг этих осей.

Группа T_h

Эта группа образуется добавлением к группе T операции инверсии. Инверсия не является операцией симметрии для тетраэдра и потому не содержится в T_d. Группа T_h есть прямое произведение групп T и S_2, т. е. $T_h = T \times S_2$.

Полная группа октаэдра O_h

Эта группа образуется добавлением к группе O инверсии I. Поэтому группа O_h является прямым произ-

ведением групп O и S_2 ($O_h = O \times S_2$). Группа O_h включает в себя все собственные и несобственные операции симметрии, преобразующие в себя куб или октаэдр.

Группа Y_h

Эта группа образуется добавлением инверсии к группе Y и, таким образом, равна прямому произведению групп Y и S_2 ($Y_h = Y \times S_2$). Она является полной группой, включающей в себя все собственные и несобственные операции симметрии, преобразующие икосаэдр или додекаэдр в себя.

§ 4. СТРУКТУРА КЛАССОВ ТОЧЕЧНЫХ ГРУПП

Для упрощения построения неприводимых представлений точечных групп методами, изложенными в гл. 4, разобьем прежде всего элементы групп на классы, используя частично результаты гл. 2, § 6 и 7. Классы обозначаются по типичному элементу, принадлежащему этому классу, поскольку все элементы данного класса — это вращения на один и тот же угол (например, поворот C_n или зеркальный поворот S_n). Перед обозначением типичного элемента указывается число элементов в классе. Если элемент класса представляет собой m-ю степень поворота C_n вокруг оси порядка n, то он обозначается символом $(\mathsf{C}_n)^m \equiv \mathsf{C}_n^m$, перед которым ставится число элементов класса. Вместо обозначений S_1 и S_2 обычно используются символы σ и I, причем индекс у σ показывает, относительно какой плоскости (горизонтальной или вертикальной) происходит отражение. Если имеется несколько неэквивалентных классов вращений C_n, то они различаются штрихами или индексами, обозначающими ось вращения (обычно ось z является осью максимальной симметрии).

А. Собственные точечные группы

Группы C_n

Поскольку эти группы являются абелевыми, каждый элемент сам по себе является классом.