ведением групп O и S_2 ($O_h = O \times S_2$). Группа O_h включает в себя все собственные и несобственные операции симметрии, преобразующие в себя куб или октаэдр.

Группа Y_h

Эта группа образуется добавлением инверсии к группе Y и, таким образом, равна прямому произведению групп Y и S_2 ($Y_h = Y \times S_2$). Она является полной группой, включающей в себя все собственные и несобственные операции симметрии, преобразующие икосаэдр или додекаэдр в себя.

§ 4. СТРУКТУРА КЛАССОВ ТОЧЕЧНЫХ ГРУПП

Для упрощения построения неприводимых представлений точечных групп методами, изложенными в гл. 4, разобьем прежде всего элементы групп на классы, используя частично результаты гл. 2, § 6 и 7. Классы обозначаются по типичному элементу, принадлежащему этому классу, поскольку все элементы данного класса — это вращения на один и тот же угол (например, поворот C_n или зеркальный поворот S_n). Перед обозначением типичного элемента указывается число элементов в классе. Если элемент класса представляет собой m-ю степень поворота C_n вокруг оси порядка n, то он обозначается символом $(\mathsf{C}_n)^m \equiv \mathsf{C}_n^m$, перед которым ставится число элементов класса. Вместо обозначений S_1 и S_2 обычно используются символы σ и I, причем индекс у σ показывает, относительно какой плоскости (горизонтальной или вертикальной) происходит отражение. Если имеется несколько неэквивалентных классов вращений C_n, то они различаются штрихами или индексами, обозначающими ось вращения (обычно ось z является осью максимальной симметрии).

А. Собственные точечные группы

Группы C_n

Поскольку эти группы являются абелевыми, каждый элемент сам по себе является классом.

Группы D_n

Наличие дополнительных осей второго порядка приводит к тому, что элементы C_n^p и C_n^{-p} попадают в один класс; такие оси называют двусторонними. (Эти элементы не различаются, если $p=n/2$ при четном n, поскольку тогда C_n^p есть поворот на угол π.) При нечетном n все повороты на угол π вокруг горизонтальных осей относятся к одному классу, однако при четном n операции поворотов вокруг двух последовательных осей второго порядка попадают в два неэквивалентных класса. Например, для группы D_4 классами являются E, $2C_4$, C_4^2, $2C_2$, $2C_2'$, а для группы D_5 — E, $2C_5$, $2C_5^2$, $5C_2$.

Группа тетраэдра T

Для этой группы все повороты на угол π переводят оси второго порядка друг в друга. Из восьми поворотов на угол $2\pi/3$ не все принадлежат одному классу, но разделяются на два класса по четыре элемента в каждом (этими элементами можно считать повороты по и против часовой стрелки вокруг четырех осей третьего порядка). При этом повороты, в результате которых ось становилась бы двусторонней, отсутствуют; группа состоит из следующих классов: E, $3C_2$, $4C_3$, $4C_3'$.

Группа октаэдра O

Восемь поворотов на угол $2\pi/3$ принадлежат одному классу, поскольку имеется поворот на угол π вокруг оси, перпендикулярной каждой оси третьего порядка, который и делает эти оси двусторонними. Указанные шесть поворотов на π принадлежат одному классу, но отличаются от трех других поворотов на π вокруг осей четвертого порядка. Таким образом, группа O разбивается на классы E, $8C_3$, $3C_4^2$, $6C_2$, $6C_4$.

Группа икосаэдра Y

В этой группе имеется шесть двусторонних осей пятого порядка, пятнадцать осей второго порядка и десять двусторонних осей третьего порядка. Эта группа имеет следующее разбиение на классы (см. книгу Мурнагана): E, $12C_5$, $12C_5^2$, $15C_2$, $20C_3$.

Б. Несобственные точечные группы

Прежде чем подробно рассматривать несобственные точечные группы, отметим общие особенности их структуры. Прежде всего, произведение двух несобственных элементов является элементом собственным. Действительно, детерминант несобственных вращений равен -1 (гл. 7, § 4), а их произведение должно иметь детерминант $+1$; следовательно, оно должно быть собственным вращением. Аналогично произведение несобственного и собственного элементов должно быть несобственным элементом. Рассмотрим теперь несобственную группу $\mathcal{G}$, элементы которой разделены на два множества: собственные элементы $\mathcal{H}$ и несобственные $\mathcal{K}$, так что можно написать $\mathcal{G}=\mathcal{H}+\mathcal{K}$. Умножив обе части этого равенства на какой-либо несобственный элемент K_i, по теореме о перечислении групп (гл. 2, § 9) получим

$$\mathsf{G}=\mathsf{K}_i\mathsf{G}=\mathsf{K}_i\mathsf{H}+\mathsf{K}_i\mathsf{K}. \tag{9.4}$$

Поскольку элементы $\mathsf{K}_i\mathsf{H}$ являются несобственными, а $\mathsf{K}_i\mathsf{K}$ — собственными, мы имеем $\mathsf{K}_i\mathsf{H}=\mathsf{K}$, а $\mathsf{K}_i\mathsf{K}=\mathsf{H}$, что позволяет написать

$$\mathsf{G}=\mathsf{H}+\mathsf{K}_i\mathsf{H}. \tag{9.5}$$

Если в качестве одного из несобственных элементов в группе имеется инверсия I, то можно выбрать $\mathsf{K}_i=\mathsf{I}$ и, учитывая коммутативность I со всеми другими элементами группы, записать группу $\mathcal{G}$ в виде прямого произведения $\mathcal{G}=\mathcal{H}\times\{\mathsf{E}+\mathsf{I}\}=\mathcal{H}\times S_2$. Если группа не содержит инверсию, то ее все же можно записать в виде прямого произведения $\mathcal{G}=\mathcal{H}\times\{\mathsf{E}+\mathsf{K}_i\}$, если существует несобственный элемент K_i, коммутирующий со всеми элементами группы. Кроме того, если инверсия отсутствует, группа $\mathcal{G}$ изоморфна группе $\mathcal{G}'=\mathcal{H}+\mathsf{I}\mathcal{K}$, которая является собственной точечной группой, поскольку IK — собственное вращение. Чтобы установить этот изоморфизм, заметим, что, поскольку I не содержится в $\mathcal{G}$, элементы группы IK_j не могут совпадать ни с одним элементом группы $\mathcal{H}$. Далее можно элементарно доказать искомый изоморфизм, ассоциируя элемент IK_j группы $\mathcal{G}'$ с элементом K_j группы $\mathcal{G}$ и учитывая, что все элементы группы $\mathcal{H}$ являются общими

для обеих групп; например, если $\mathsf{H}_e\mathsf{K}_j=\mathsf{K}_m$, то, следовательно, $\mathsf{H}_e(\mathsf{I}\mathsf{K}_j)=\mathsf{I}\mathsf{H}_e\mathsf{K}_j=(\mathsf{I}\mathsf{K}_m)$. Используем далее эти свойства для разбиения на классы несобственных точечных групп.

Группы S_{2n}

Эти группы — циклические порядка $2n$, причем каждый их элемент образует отдельный класс. При нечетном n эти группы можно записать в виде прямого произведения групп, так как они содержат инверсию: в этом случае $S_{4m+2}=C_{2m+1}\times S_2$.

Группы C_{nh}

Отражение в горизонтальной плоскости коммутирует с поворотами на угол $2\pi/n$, так что группы C_{nh} являются абелевыми и каждый элемент этих групп образует отдельный класс. При четном n в группы входит инверсия и их можно записать в виде прямого произведения $C_{2mh}=$ $=C_{2m}\times S_2$. При нечетном n группы C_{nh} также могут быть записаны в виде прямого произведения групп C_n и S_1 (последняя состоит только из единичного элемента и отражения σ): $C_{2m+1h}=C_{2m+1}\times S_1$.

Группы C_{nv}

Входящее в эти группы отражение в вертикальной плоскости не коммутирует с поворотами на угол $2\pi/n$, так что группы C_{nv} не являются абелевыми, например: $\mathsf{C}_n^k\sigma_v=\sigma_v\mathsf{C}_n^{-k}$. Последнее равенство показывает также, что элементы C_n^k и C_n^{-k} принадлежат одному классу. Все отражения входят в один класс, если n нечетно, но при четном n они разбиваются на два класса. Из общих результатов, приведенных выше, следует, что группы C_{nv} будут изоморфны группам, полученным умножением несобственных элементов (отражений) на инверсии. Эта операция дает оси вращения второго порядка, перпендикулярные осям вращения n-го порядка; следовательно, группы C_{nv} изоморфны группам D_n и обладают тем же разбиением на классы. Например, для группы C_{4v} классами будут являться E, $2\mathsf{C}_4$, C_4^2, $2\sigma_v$, $2\sigma_v'$, а классы группы C_{5v} таковы: E, $2\mathsf{C}_5$, $2\mathsf{C}_5^2$, $5\sigma_v$.

Группы D_{nh}

Для этих групп отражение в плоскости σ_h коммутирует со всеми элементами D_n, так что эти группы можно записать в виде прямых произведений $D_{nh}=D_n\times S_1$. При четном n в группы входит инверсия и их можно записать в ином виде: $D_{2mh}=D_{2m}\times S_2$. В любом случае разбиение на классы просто связано с таким же разбиением групп D_n: для каждого класса из группы D_n имеется два класса из группы D_{nh}. Так, например, классами для группы D_{3h} являются E, σ_h, $2\mathsf{C}_3$, $2\mathsf{S}_3$, $3\mathsf{C}_2$, $3\sigma_v\,(=\mathsf{C}_2\sigma_h)$.

Группы D_{nd}

При нечетном n имеется ось второго порядка, перпендикулярная каждой из вертикальных плоскостей отражения, так что группы содержат инверсию и могут быть записаны в виде $D_{2m+1d}=D_{2m+1}\times S_2$; соответственно этому их разбиение на классы следует из разбиения групп D_{2m+1}. При четном n инверсия не входит в группы D_{nd}, но, умножая несобственные элементы на инверсию, мы получаем дополнительные оси второго порядка, лежащие в вертикальных плоскостях отражения; следовательно, группа переходит в D_{2n}. Таким образом, при четном n группа D_{nd} изоморфна группе D_{2n} и имеет одинаковое с ней разбиение на классы. Например, для группы D_{2d} имеем классы E, $2\mathsf{S}_4$, C_2, $2\mathsf{C}_2'$, $2\sigma_d$, а для группы D_{3d} — классы E, I, $2\mathsf{C}_3$, $2\mathsf{S}_3$, $3\mathsf{C}_2$, $3\sigma_d$.

Группа T_d

По определению группы T_d, данному выше, она разбивается на классы E, $3\mathsf{C}_2$, $8\mathsf{C}_3$, 6σ и $6\mathsf{S}_4$, поскольку оси третьего порядка группы T становятся теперь двусторонними.

Группы T_h, O_h и Y_h

Все эти группы содержат инверсию и потому являются прямыми произведениями групп T, O и Y с группой S_2. Их разбиение на классы непосредственно следует из соответствующего разбиения групп T, O, Y.