

б) не эквивалентны их комплексно-сопряженным представлениям и в) эквивалентным их комплексно-сопряженным представлениям, но не эквивалентны действительным. Во всех случаях следует иметь в виду антилинейную и антиунитарную природу оператора Υ (т. 2, гл. 15, § 7, п. Г).

§ 9. РАСПЩЕПЛЕНИЕ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Посмотрим теперь, как симметрия точечных групп помогает объяснить свойства атомов в кристаллическом поле. Дальнейшее приложение изложенной теории к электронным состояниям в молекуле см. в т. 2, гл. 13. При правильном расположении атомов в бесконечном кристалле возможна симметрия по отношению к операциям точечной группы с центром на любом из атомов. Кроме того, полная симметрия кристалла включает в себя не только локальную точечную группу на каком-либо выделенном узле решетки, но также трансляции, смещающие данный атом на целое число ячеек и оставляющие при этом неизменной совокупность атомов внутри каждой ячейки. Свойства, обусловленные трансляционной симметрией, можно в известной мере рассматривать отдельно (т. 2, гл. 14). Здесь мы остановимся лишь на том влиянии, которое локальная точечная группа симметрии оказывает на свойства одного из атомов, составляющих кристалл.

А. Постановка физической задачи

В гл. 8 мы рассматривали состояния свободного атома, пользуясь инвариантностью гамильтониана относительно группы O_3 вращений и отражений в трехмерном пространстве при классификации уровней энергии. Будучи помещен в кристалл, атом подвергается действию электрических и магнитных полей, создаваемых окружающими атомами и поникающими симметрию до одной из кристаллографических точечных групп. Как показано в гл. 5, § 8, такое понижение симметрии вызывает расщепление некоторых вырожденных уровней энергии свободного атома, причем остаточное вырождение будет определяться точечной группой. Детальный характер расщепления и точные значения энергии состояний зависят, конечно, от точного вида потенциала кристаллического поля и вол-

новых функций, но некоторые отношения величин расщеплений можно вычислить на основе только теории групп (точнее, теоремы Вигнера — Эккарта). Экспериментально низколежащие уровни энергии можно исследовать разными методами. В первых экспериментах расщепление исследовалось путем измерения теплоемкости и магнитной восприимчивости, а в дальнейшем более детально — на основе метода оптического поглощения. Наконец, спектроскопия парамагнитного резонанса позволила накопить большое количество данных высокой точности для ионов переходных и редкоземельных металлов в кристаллических солях.

Когда атомы объединяются в кристалл, обычно происходит некоторая перестройка внешних электронов с тенденцией к ионизации и образованию структур с замкнутыми оболочками. С точки зрения симметрии это не представляет интереса, так как замкнутая оболочка не вырождена и не может быть расщепления, обусловленного сужением симметрии от группы O_3 до точечной группы. Но некоторые элементы из групп переходных металлов (лантаниды, актиниды, группа железа) обладают незаполненной внутренней электронной оболочкой, окруженной полностью заполненными оболочками. Когда такие атомы объединяются в кристалл, их внутренние оболочки остаются незаполненными, поскольку они экранируются внешними электронами. Такие кристаллы — удобные объекты для исследования влияния кристаллического поля на энергетические уровни атома именно благодаря незаполненной внутренней электронной оболочке. Детальное сравнение теоретических выводов с экспериментальными данными для таких систем не только дало информацию об интенсивности кристаллических полей, но и внесло ясность в фундаментальную теорию атомных состояний.

Гамильтониан атома или иона в кристаллическом поле дается выражением $H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3$ (в обозначениях гл. 8, § 6, п. А). Здесь H_0 описывает центральное поле, H_1 — кулоновское отталкивание между электронами, H_2 — спин-орбитальное взаимодействие, H_3 — кристаллическое поле. При анализе влияния кристаллического поля H_3 нужно рассмотреть три простых предельных случая:

1. Слабое поле, когда $H_3 \ll H_2 \ll H_1 \ll H_0$.
2. Промежуточное поле, когда $H_2 \ll H_3 \ll H_1 \ll H_0$,
3. Сильное поле, когда $H_2 \ll H_1 \ll H_3 \ll H_0$.

Соли лантанидов, или редкоземельных элементов (например, церийэтилсульфата), могут служить примером случая слабого поля. В электронную конфигурацию иона лантанида входят все заполненные оболочки до $4d$ -оболочки включительно; далее следует не полностью заполненная $4f$ -оболочка, содержащая от 1 до 13 электронов (по мере продвижения от начала группы к ее концу), а завершают конфигурацию две заполненные оболочки $5s^25p^6$. Эти две оболочки окружают электроны $4f$ -оболочки и экранируют их от действия кристаллического поля, так что испытываемое ими эффективное поле очень слабое. В этом случае $(2J+1)$ -кратный спин-орбитальный мультиплет J , описанный в гл. 8, § 6, п. В, будет расщеплен малым возмущением H_3 .

Соли группы железа (например, бромат ванадия) могут служить примером поля в интервале от промежуточного до сильного. В этом случае в электронную конфигурацию входят все заполненные оболочки до $3p$ -оболочки включительно. При этом самой внешней является незаполненная $3d$ -оболочка; она испытывает полное действие кристаллического поля. В зависимости от конкретной выбранной соли поле в этом случае будет меняться от промежуточного до сильного. В промежуточном случае H_3 считается малым возмущением кулоновского взаимодействия; его действие сводится к расщеплению $(2L+1)$ -кратного вырождения мультиплета ^{2S+1}L , возникшего вследствие LS -связи. При этом спин-орбитальное взаимодействие играет роль самого слабого возмущения. В случае сильного поля кристаллическое поле H_3 является вторым по величине непосредственно после центрального поля H_0 , так что его действие сводится к возмущению центрального поля, в котором движутся электроны.

Б. Определение характера расщеплений из соображений симметрии

Выберем в качестве объекта для иллюстрации методов расчета влияния кристаллического поля в случаях 1—3 одну соль — бромат ванадия (это удобнее, чем брать три

разные соли). По существу для этого соединения кристаллическое поле относится к случаю 2, но на практике не всегда можно быть априори уверенным, какой именно случай из трех возможных осуществляется для данной конкретной соли. Может оказаться необходимым провести

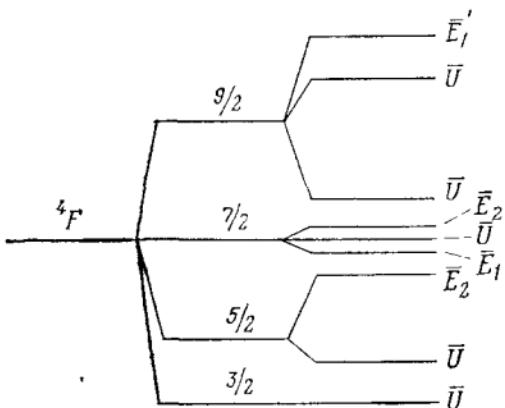


Рис. 9.8

вычисления несколькими способами, и только последующее сравнение с экспериментом может указать наилучший из них.

Химическая формула бромата ванадия такова: $Vd(BrO_3)_2 \cdot 6H_2O$. Выбор такой на первый взгляд достаточно сложной гидратированной соли оправдан тем, что нас интересует поведение одного иона ванадия в кристал-

лическом поле. Если бы мы выбрали молекулу с высоким содержанием ванадия, то между самими ионами ванадия возникли бы сложные взаимодействия. В выбранной нами соли ионы ванадия расположены на больших расстояниях друг от друга, так что их взаимодействием можно пренебречь. В этой соли шесть молекул воды окружают ион ванадия, образуя конфигурацию почти правильного октаэдра, так что в качестве соответствующей группы симметрии можно принять группу O . (В действительности существует небольшое тригональное искажение, которым можно пренебречь.) Ион ванадия Vd^{++} обладает электронной конфигурацией $1s^2 \dots 3p^6 3d^3$, т. е. в неполнотью заполненной оболочке находится три электрона. Основное состояние этого свободного иона — 4F с $L=3$ и $S=\frac{3}{2}$. Это можно показать методом гл. 8, § 6, п. Г. В отсутствие кристаллического поля спин-орбитальное взаимодействие расщепило бы мультиплет $4F$ на четыре уровня с $J=\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ и $\frac{9}{2}$ в соответствии с формулой (8.39) (рис. 9.8, средняя система уровней).

Слабое поле

Если кристаллическое поле слабое, то каждый $(2J+1)$ -кратно вырожденный уровень J слегка расщепится, при-

Таблица 9.5

	E	\bar{E}	$8C_3$	$8\bar{C}_3$	$\frac{3\bar{C}_2}{3C_2}$	$6C_4$	$6\bar{C}_4$	$\frac{6\bar{C}_2}{6C_2}$
A_1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
E	2	2	-1	-1	2	0	0	0
T_1	3	3	0	0	-1	1	1	-1
T_2	3	3	0	0	-1	-1	-1	1
\bar{E}_1	2	-2	1	-1	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
\bar{E}_2	2	-2	1	-1	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
\bar{U}	4	-4	-1	1	0	0	0	0
$D^{(3/2)}$	4	-4	-1	1	0	0	0	$= \bar{U}$
$D^{(5/2)}$	6	-6	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$= \bar{E}_2 \oplus \bar{U}$
$D^{(7/2)}$	8	-8	1	-1	0	0	0	$= \bar{E}_1 \oplus \bar{E}_2 \oplus \bar{U}$
$D^{(9/2)}$	10	-10	-1	1	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$= \bar{E}_1 \oplus 2\bar{U}$
$D^{(3)}$	7	7	1	1	-1	-1	-1	$= A_2 \oplus T_1 \oplus T_2$
$\bar{U} \times A_2$	4	-4	-1	1	0	0	0	$= \bar{U}$
$\bar{U} \times T_1$	12	-12	0	0	0	0	0	$= \bar{E}_1 \oplus \bar{E}_2 \oplus 2\bar{U}$
$\bar{U} \times T_2$	12	-12	0	0	0	0	0	$= \bar{E}_1 \oplus \bar{E}_2 \oplus 2\bar{U}$
$D^{(2)}$	5	5	-1	-1	1	-1	-1	$= E \oplus T_2$
$\{T_2 \times T_2 \times T_2\}_a$	1	1	1	1	1	-1	-1	$= A_2$
$\{T_2 \times T_2\}_a$	3	3	0	0	-1	1	-1	$= T_1$
$T_1 \times E$	6	6	0	0	-2	0	0	$= T_1 \oplus T_2$
$\{E \times E\}_a$	1	1	1	1	1	-1	-1	$= A_2$
$A_2 \times T_2$	3	3	0	0	-1	1	-1	$= T_1$
$D^{(1)}$	3	3	0	0	-1	1	1	$= T_1$
$D^{(4)}$	9	9	0	0	1	1	1	$= A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2$
$D^{(5)}$	11	11	-1	-1	-1	1	1	$= E \oplus 2T_1 \oplus T_2$

чем характер расщепления можно определить, исследуя разложение представления группы \mathcal{R}_3 :

$$\mathbf{D}^{(J)} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{T}^{(\alpha)}, \quad (9.7)$$

где $\mathbf{T}^{(\alpha)}$ — неприводимые представления точечной группы O . Мы воспроизводим из приложения 1 таблицу характеров (в том числе двузначных представлений) в первых восьми строках табл. 9.5. Здесь же приведены характеры для представлений $\mathbf{D}^{(J)}$, вычисленные по формуле (7.42). С их помощью легко вычисляются коэффициенты m_{α} . Получающееся расщепление показано на рис. 9.8 (третья система уровней). Описание упорядочения уровней $T^{(\alpha)}$ в пределах каждого мультиплета мы отложим до т. 2 (приложение 5, § 4).

Промежуточное поле

В предыдущем примере было проиллюстрировано действие слабого поля; еще раз напомним о том, что в действительности поле в бромате ванадия достаточно сильно для того, чтобы его можно было рассматривать в приближении промежуточного поля (случай 2). Перейдем теперь к случаю, когда кристаллическое поле велико по сравнению со спин-орбитальным

взаимодействием. Начнем вновь с одного мультиплета 4F и рассмотрим действие кристаллического поля до включения малого спин-орбитального поля. При этом можно сначала пре-небречь наличием спина и рассмотреть разложение орбитального состояния с $L=3$ по неприводимым представлениям точечной группы O . Для этого нужно всего лишь знать характер представления $\mathbf{D}^{(3)}$, вычисляемый вновь по формуле (7.42) и пред-

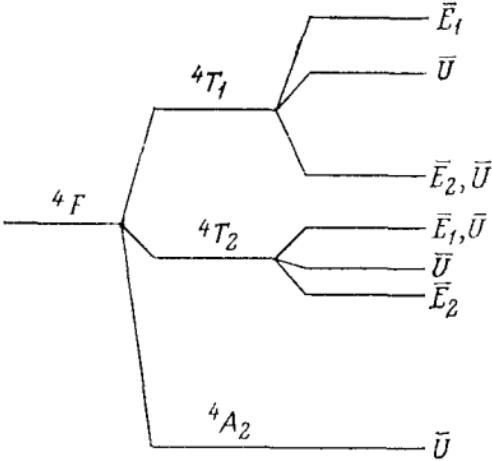


Рис. 9.9

ставленный в табл. 9.5 (там же приведено разложение представления $\mathbf{D}^{(3)}$ на $A_2 \oplus T_1 \oplus T_2$). Отсюда получается вторая система уровней на рис. 9.9, где показано

расщепление уровня 4F_2 на три уровня 4A_2 , 4T_1 и 4T_2 , обладающие кратностями вырождения 4, 12 и 12 (с учетом четырехкратного вырождения по спину).

При учете малого спин-орбитального взаимодействия произойдет дальнейшее расщепление. Чтобы определить его величину, заметим, что спиновое состояние $S = \frac{3}{2}$, преобразуется как \bar{U} под действием группы O (табл. 9.5, $D^{(\frac{3}{2})}$), так что, например, уровень 4A_2 преобразуется как произведение $\bar{U} \oplus A_2$. Однако подобные произведения можно разложить по неприводимым представлениям группы O следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{U} \otimes A_2 &= \bar{U}, \\ \bar{U} \otimes T_2 &= 2\bar{U} \oplus \bar{E}_2 \oplus \bar{E}_1, \\ \bar{U} \otimes T_1 &= 2\bar{U} \oplus \bar{E}_2 \oplus \bar{E}_1;\end{aligned}$$

это следует из таблицы характеров.

Данный этап вычислений аналогичен разложению $D^{(\frac{3}{2})} \otimes D^{(3)} = D^{(\frac{9}{2})} \oplus D^{(\frac{7}{2})} + D^{(\frac{5}{2})} + D^{(\frac{3}{2})}$ для группы \mathcal{R}_3 , использованному при выводе второй (слева) системы уровней на рис. 9.8. Окончательно спин-орбитальное взаимодействие приводит к третьей системе уровней на рис. 9.9. Мы не будем далее останавливаться на расщеплении и упорядочении уровней, обусловленных спинорбитальными силами.

Сильное поле

В заключение рассмотрим на том же примере бромата ванадия расщепление, которое следует ожидать в пределе сильного поля. В этом случае кристаллическое поле сильнее кулоновского взаимодействия e^2/r_{ij} между электронами, так что его следует учитывать в первую очередь. Это, однако, несложно, так как кристаллическое поле описывается одночастичным оператором и его влияние сводится к искажению центрального поля, в котором движутся электроны. Таким образом, вместо сферически-симметричного поля с обычным пятикратным вырождением уровня (значения $m = 2, 1, \dots, -2$ для трех валентных электронов в d -состояниях) мы получим единственное состояние электрона, отвечающее неприводимому представлению группы симметрии O (ту же симметрию

имеет теперь и само поле). Из табл. 9.5 видно, что $D^{(2)} = E \otimes T_2$, так что пять d -орбит расщепляются в дублет, обозначаемый через e , и триплет t_2 . Практически оказывается, что для бромата ванадия состояние t_2 имеет более низкую энергию, чем состояние e .

При наличии трех электронов возникает вопрос о том, какую из орбит, e или t_2 , использовать, но ясно, что основное состояние будет иметь конфигурацию t_2^3 , в которой все три частицы находятся на орбите t_2 с более низкой энергией. При повышении энергии возбуждения должны также наблюдаться состояния, соответствующие конфигурациям t_2^2e , t_2e^2 и e^3 . Полный спин S все еще будет в отличие от L хорошим квантовым числом, и правило Хунда, благоприятствующее состояниям с большим S , все еще будет применимо. Поэтому мы, как и в случаях 1 и 2, ограничимся случаем максимального спина $S = 3/2$.

Кулоновское взаимодействие между электронами приведет теперь к снятию орбитального вырождения каждой конфигурации типа t_2^3 и ее расщеплению. На этом этапе расчета гамильтониан, включающий H_0 , H_1 и H_3 , остается, разумеется, инвариантным относительно группы O и вновь возникающие состояния будут классифицироваться по тем неприводимым представлениям группы O , которые появляются при разложении представления произведений, подобных $T_2 \otimes T_2 \otimes T_2$ для конфигурации t_2^3 . Поскольку, однако, спиновая часть волновой функции, соответствующей значению $S = 3/2$, симметрична относительно всех перестановок, в силу принципа Паули необходимо, чтобы орбитальное состояние было полностью антисимметричным. Следовательно, нам нужно знать характеры антисимметризованных произведений. В гл. 6, § 6 была выведена формула (6.33) для характера симметризованного произведения двух сомножителей; вычтя из него $\{\chi^{(\alpha)}(G_a)\}^2$ в случае полного пространства произведения, получим

$$\chi_{\text{антисимм}}^{(\alpha \times \alpha)}(G_a) = \frac{1}{2} \{\chi^{(\alpha)}(G_a)\}^2 - \frac{1}{2} \chi^{(\alpha)}(G_a^2),$$

где использованы обозначения гл. 6, § 6. Для произведения трех сомножителей получим (т. 2, приложение 3, § 1) аналогичную формулу

$$\chi_{\text{антисимм}}^{(\alpha \times \alpha \times \alpha)}(G_a) = \frac{1}{6} [\{\chi^{(\alpha)}(G_a)\}^3 - 3\chi^{(\alpha)}(G_a^2)\chi^{(\alpha)}(G_a) + 2\chi^{(\alpha)}(G_a^3)].$$

Для наимизшей конфигурации t_3^2 характер произведения $T_2 \otimes T_2 \otimes T_2$ показан в табл. 9.5; как нетрудно видеть, только состояние A_2 имеет правильную симметрию, так что основным состоянием в сильном поле вновь является A_2 . Аналогичное вычисление для e^3 привело бы к нулевому значению характера, откуда видно, что для этой конфигурации отсутствуют антисимметрические состояния. Это можно было бы сказать заранее, так как e — лишь дублет и два из трех электронов должны были бы неизбежно находиться в одинаковых состояниях. Для других конфигураций $t_2^2 e$ и $t_2 e^2$ необходимо найти характеры антисимметризованных произведений $\{T_2 \otimes T_2\}_a$ и $\{E \otimes E\}_a$ и затем умножить первый на E , а второй — на T_2 . Как явствует из табл. 9.5, эта процедура приведет к второй слева системе уровней рис. 9.10. (Определение величины расщепления между новыми уровнями на рис. 9.10 потребовало бы вычислений с двухчастичным кулоновским потенциалом, в какой-то мере аналогичных вычислениям, приведенным в т. 2, приложение 5.) Большее число уровней на рис. 9.10 обусловлено тем, что учитывались все состояния с $S = \frac{3}{2}$. Соответствующие вычисления для случаев 1 и 2 потребовали бы дополнительного учета возбужденного мультиплета 4P . Картина спин-орбитального расщепления в случае сильного поля совпадает с аналогичной картиной в случае промежуточного поля, хотя величина расщепления может быть иной.

Для получения точных результатов, а также для анализа случаев, когда величина поля не находится вблизи одного из трех предельных случаев, следует учитывать возможность смешивания состояний с одинаковыми индексами по отношению к группе O . Это весьма громоздкая численная задача, включающая диагонализацию матриц. Разумеется, переход от случая слабого поля к сильному через промежуточные значения является непрерывным.

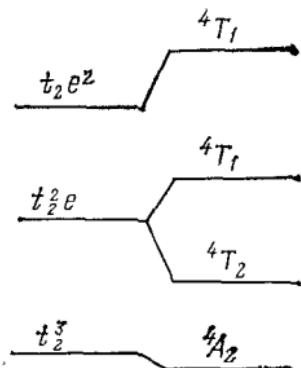


Рис. 9.10

Правила отбора

Правила отбора, рассмотренные в гл. 5, § 4 и 6, находят прямое применение в задаче о кристаллическом поле. В гл. 5, § 4 мы видели, что оператор диагональных переходов преобразуется согласно векторному представлению $D^{(1)}$ группы \mathcal{R}_3 , а следовательно (табл. 9.5), согласно представлению T_1 группы O . Поскольку $T_1 \otimes \bar{U} = \bar{E}_1 \oplus \bar{E}_2 + 2\bar{U}$ (табл. 9.5), все состояния, изображенные на рис. 9.8—9.10, должны возбуждаться из основного состояния \bar{U} . Но более тщательный анализ свойств этих состояний обнаруживает наличие правил отбора. В случае слабой связи (рис. 9.8) правило отбора по J , согласно формуле (8.3), запрещает переходы в состояния с $J = \frac{7}{2}$ и $J = \frac{9}{2}$, так что возбуждаться могут лишь первые два состояния \bar{U} и \bar{E}_2 . В случаях промежуточного и сильного полей (рис. 9.9 и 9.10) разложение $T_1 \otimes A_2 = T_2$ (табл. 9.5) показывает, что состояния T_1 не могут возбуждаться в результате дипольных процессов. Таким образом, должны возбуждаться лишь первые четыре состояния \bar{U} , \bar{E}_2 , \bar{E}_1 и \bar{U} .

Но нужно помнить, что все рассмотренные в этом примере состояния возникли из конфигурации d^3 и потому имеют положительную четность (гл. 8, § 6, п. Б). Следовательно, электрические дипольные переходы между этими состояниями запрещены (см. о группе S_2 в гл. 5, § 6); разрешены лишь значительно более медленные магнитные дипольные переходы. На практике часто имеет место небольшая примесь состояний противоположной четности (ввиду отсутствия инверсионной симметрии кристалла), из-за чего могут происходить слабые электрические дипольные переходы.

В. Влияние магнитного поля

Экспериментальные измерения магнитной восприимчивости и спектра парамагнитного резонанса при низких температурах дают информацию о низколежащих уровнях энергии при наличии слабого электромагнитного поля.

Измеренная магнитная восприимчивость косвенным образом характеризует разности энергий уровней (энерге-

тические щели), так как в нее входит населенность этих уровней как функция температуры. Спектроскопия электронного парамагнитного резонанса измеряет эти разности непосредственно с помощью радиочастотных переходов между ними. При полном описании указанных расщеплений необходимы многочисленные уточнения (см. монографию Абрагама и Блини) — например, учет спин-спинового и сверхтонкого взаимодействий, имеющих во многих случаях сравнимые значения. Но здесь мы рассмотрим только влияние магнитного поля для соли бромата ванадия, о которой уже говорилось выше.

Как и в гл. 8, § 6, учет магнитного поля добавляется к гамильтониану H из п. А слагаемое

$$H_{\text{магн}} = (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \mu_B, \quad (9.8)$$

которое трактуется далее как малое возмущение.

Слабое поле

В этом случае основное состояние было \bar{U} -квартетом, соответствующим значениям $J = {}^3/2$, $M_J = {}^3/2, {}^1/2, -{}^1/2, -{}^3/2$.

Поскольку в этом случае отсутствовало расщепление, вызванное кристаллическим полем, а основное состояние по-прежнему характеризуется определенным значением J , расщепление, обусловленное магнитным полем, в точности совпадает с описанным в гл. 8, § 6, причем фактор Ланде $g_J = 0,4$ [формула (8.40)], а расщепление пропорционально величине M .

Промежуточные и сильные поля

Вычисления, проиллюстрированные на рис. 9.9, показывают, что если кристаллическое поле превышает спин-орбитальное взаимодействие в основном состоянии, то последнее, бывшее квартетом \bar{U} , становится орбитальным синглетом A_2 . Поэтому в отсутствие спинового момента оно не может быть расщеплено магнитным полем, что следует из общих соображений о правилах отбора. Оператор L преобразуется подобно вектору $D^{(1)}$ при вращениях, или, согласно табл. 9.5, по представлению $T^{(1)}$ группы O . Такой оператор должен иметь нулевое среднее значение по состоянию A_2 , что следует из обычных пра-

вил отбора, так как произведение $T_1 \otimes A_2$ не содержит A_2 . Сдвиг энергии, обусловленный магнитным полем, дается просто формулой (9.8):

$$\Delta E_M = 2\mu_B \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \rangle = 2\mu_B BM_S$$

с g -фактором, равным 2. Такую ситуацию (магнитные свойства основного состояния обусловлены исключительно спином) часто называют «замораживанием» орбитального движения сильным кристаллическим полем.

Заметим, что, хотя основное состояние имеет одинаковую симметрию \bar{U} относительно группы O во всех трех случаях, g -фактор равен 0,4 в случае 1 и 2,0 — в двух других. Эксперимент дает значение 1,96, согласующееся со случаями сильного и промежуточного поля.

ЛИТЕРАТУРА¹⁾

Впервые точечные группы для описания расщепления в кристаллическом поле были использованы в работе

Bethe H. A., Ann. der Phys., 1929, B. 3, S. 3, 133.

Очень подробные таблицы, относящиеся к кристаллографическим точечным группам, даны в книге

Koster G. F., Dimmock J. O., Wheeler R. G., Statz H., Properties of the Thirty-two Point Groups, Technology Press, M. I. T., Cambridge, Mass., 1963.

Группа икосаэдра описана в книге

Murnaghan F. D., Theory of Group Representations, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1938. [Имеется перевод: Мурнаган Ф. Д. Теория представлений групп.— М.: ИЛ, 1955.]

Подробное обсуждение двузначных представлений можно найти в работах

Opechowski W., Physica, 1940, v. 7, p. 552.

Bradley C. J., Cracknell A. P., The Mathematical Theory of Symmetry in Solids, Oxford University Press, 1972.

Штрайтвольф Г. Теория групп в физике твердого тела.— М.: Мир, 1971*.

Желудев И. С. Симметрия и ее приложения.— М.: Атомиздат, 1976*.

Shubnikov A. V., Belov N. V., Coloured Symmetry.— London: Pergamon Press, 1964*.

Для дальнейшего чтения по теории кристаллических полей рекомендуем книгу Джадда (см. литературу к гл. 8), а также монографию

¹⁾ Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе.— Прим. ред.