

дает прямое произведение  $SU_2 \times U_1$ . Если обозначить базисные векторы пространства, в котором действует группа  $SU_3$ , через  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ , то на подпространстве, индуцированном на векторы  $e_1$  и  $e_2$ , действует подгруппа  $SU_2$ , порожденная инфинитезимальными операторами  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Элемент подгруппы  $U_1$  может быть представлен в виде  $U(a) = \exp(ax_8)$ , так что  $U(a)e_1 = \exp(-ia)e_1$ ,  $U(a)e_2 = \exp(-ia)e_2$ , а  $U(a)e_3 = \exp(2ia)e_3$ .

Группа  $U_1$  абелева, так как  $U(a)U(b) = U(a+b)$ ; поэтому ее неприводимые представления одномерны. Фактически группа  $U_1$  изоморфна группе  $\mathcal{R}_2$ , рассмотренной нами в гл. 7, § 3, и ее однозначные неприводимые представления параметризуются целыми числами. Для дальнейшего нам удобно записывать эти целые числа в виде  $3Y$ . Таким образом, представления группы  $U_1$  даются формулой  $T^{(Y)} = \exp(-i3Ya)$ . Оператор  $X_8$  в этом представлении равен  $-3iY$ . При построении неприводимых представлений мы воспользуемся наличием в группе  $SU_3$  подгруппы  $SU_2 \times U_1$ .

Если мы ограничимся действительными унимодулярными  $3 \times 3$ -матрицами, то найдем еще одно семейство подгрупп группы  $SU_3$ . Они изоморфны группе  $\mathcal{R}_3$ , о которой говорилось в гл. 7, § 4. В самом деле, нетрудно показать, что действительные матрицы  $X_2$ ,  $X_5$  и  $X_7$  удовлетворяют перестановочным соотношениям группы  $\mathcal{R}_3$  и фактически идентичны матрицам  $\mathcal{R}_3$ , даваемым формулой (7.24) для представления  $D^{(1)}$ . Мы не будем исследовать соотношение между  $SU_3$  и подгруппой  $\mathcal{R}_3$ . Заметим только, что наличие этой подгруппы в  $SU_3$  используется при объяснении коллективных движений в легких ядрах (т. 2, гл. 19, § 2).

## § 6. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SU_3$

Обратимся теперь к структуре, классификации и свойствам неприводимых представлений группы  $SU_3$ . При этом мы будем следовать методам, применявшимся в гл. 7, § 4, п. Б для группы  $\mathcal{R}_3$ . Мы будем систематически пользоваться наличием трех  $SU_2$ -подгрупп в группе  $SU_3$ , о которых шла речь в предыдущем параграфе. Для каждой из этих подгрупп необходимо ввести повышающие и понижающие операторы по аналогии с формулой (7.27). Таким

образом, оказывается удобным перейти от операторов  $X_g$  к следующим их комбинациям:

$$\begin{aligned}
 T_+ &= i(X_1 + iX_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 T_- &= i(X_1 - iX_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 U_+ &= i(X_6 + iX_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 U_- &= i(X_6 - iX_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 V_+ &= i(X_4 - iX_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 V_- &= i(X_4 + iX_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 T_z &= iX_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 Y &= 1/3 iX_8 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

Можно убедиться, что коммутатор любых двух из этих восьми матриц является их линейной комбинацией. Это, конечно, следствие общего свойства (7.7) инфинитезимальных операторов группы. Например, три матрицы  $T_{\pm}$  и  $T_z$ , будучи инфинитезимальными операторами  $SU_2$ -подгруппы, удовлетворяют перестановочным соотношениям (7.28) и (7.30):

$$[T_+, T_-] = 2T_z, \quad [T_z, T_{\pm}] = \pm T_{\pm}. \tag{11.3a}$$

Если мы положим  $U_z = \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}T_z$  и  $V_z = -\frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}T_z$ , то операторы  $U$  и  $V$  будут удовлетворять точно таким же перестановочным соотношениям, так как и они определяют  $SU_2$ -подгруппы:

$$[U_+, U_-] = 2U_z, \quad [U_z, U_{\pm}] = \pm U_{\pm}, \quad (11.36)$$

$$[V_+, V_-] = 2V_z, \quad [V_z, V_{\pm}] = \pm V_{\pm}.$$

Говоря об этих трех  $SU_2$ -подгруппах, мы будем пользоваться терминами  $T$ -спин,  $U$ -спин и  $V$ -спин. Из формул (11.2) следует, что матрица  $Y$  коммутирует с  $T_{\pm}$  и  $T_z$ . В дальнейшем нам понадобятся также и следующие перестановочные соотношения, которые легко вывести из определений (11.2):

$$[T_z, U_{\pm}] = \mp \frac{1}{2}U_{\pm}, \quad [Y, U_{\pm}] = \pm U_{\pm}, \quad (11.3b)$$

$$[T_z, V_{\pm}] = \mp \frac{1}{2}V_{\pm}, \quad [Y, V_{\pm}] = \mp V_{\pm}, \quad (11.3b)$$

$$[T_+, U_-] = [T_-, U_+] = [T_+, U_-] = 0, \quad (11.3c)$$

$$[T_-, V_+] = [U_+, V_-] = [U_-, V_+] = 0, \quad (11.3c)$$

$$[V_-, U_-] = T_+, \quad [U_+, V_+] = T_-, \quad [U_-, T_-] = V_+,$$

$$[T_+, U_+] = V_-, \quad [T_-, V_-] = U_+, \quad [V_+, T_+] = U_-.$$

Напомним (гл. 7, § 2), что в случае группы Ли такие же перестановочные соотношения выполняются во всех представлениях. Таким образом, перестановочные соотношения, полученные для  $3 \times 3$ -матриц (11.2), справедливы в общем случае.

Теперь мы воспользуемся этими перестановочными соотношениями для построения и классификации неприводимых представлений группы  $SU_3$ , так же как ранее мы использовали перестановочные соотношения (7.26) для получения неприводимых представлений  $D^{(j)}$  группы  $\mathcal{R}_3$ . Но сначала напомним последовательность шагов, предпринятых для построения представлений  $D^{(j)}$ . Во-первых, был выбран базис, в котором один из операторов, а именно  $J_z$ , диагонален. Затем, учитывая, что ни один из оставшихся операторов нельзя диагонализовать одновременно с  $J_z$ , из них были построены операторы, повышающие и понижающие собственные значения  $m$  оператора  $J_z$ . В конце концов было показано, что если  $j =$

максимальное значение величины  $m$  в данном представлении, то имеется  $(2j+1)$  базисных векторов со значениями  $m=j, j-1, \dots, -j$ . Величина  $j$  для различных представлений может принимать только значения  $j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Таким образом, неприводимое представление можно было характеризовать числом  $j$  и обозначать символом  $D^{(j)}$ . Базисные векторы можно было изобразить

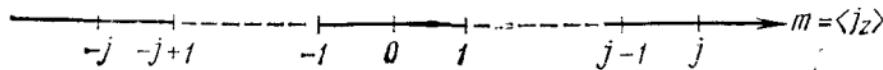


Рис. 11.1.

как ряд из  $(2j+1)$  точек на оси  $m$ , расположенных симметрично относительно начала координат с интервалами, равными единице. На рис. 11.1 представлен случай целого  $j$ . Так мы будем поступать и в случае группы  $SU_3$ , но с соответствующими усложнениями. В этом случае можно диагонализовать уже два из восьми операторов. Следовательно, для изображения базисных векторов представления  $SU_3$  вместо одномерного понадобится двумерное пространство. Для классификации неприводимых представлений также необходимо теперь два числа вместо одного  $j$ .

Обозначим на время неприводимое представление группы  $SU_3$  символом  $D$ . (Позже мы будем пользоваться более детальным обозначением  $D^{(\lambda\mu)}$ , когда определим индексы  $\lambda$  и  $\mu$ .) Мы выберем для представления базис, в котором операторы  $T_z$  и  $Y$  диагональны. Это возможно в силу их коммутативности. Более двух из восьми матриц (11.2) диагонализовать одновременно невозможно, так как это привело бы к существованию более чем двух линейно независимых диагональных  $3 \times 3$ -матриц с нулевым следом. Поскольку  $T_z$ ,  $U_z$  и  $V_z$  — это обычные  $SU_2$ -операторы, их собственные значения, как нам известно, равны  $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}$  и т. д. Из определений операторов  $U_z$  и  $V_z$  следует, что  $Y = \frac{2}{3}(U_z - V_z)$ ; стало быть, собственные значения оператора  $Y$  должны быть равны  $0, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm\frac{4}{3}$  и т. д. Тогда, если мы обозначим собственные значения операторов  $T_z$  и  $Y$  через  $M_T$  и  $Y$ , каждому базисному вектору пространства представления можно поставить в соответствие точку  $(M_T, Y)$ , расположенную в узле прямоугольной решетки с шагом  $\frac{1}{2}$  в направлении  $M_T$  и с шагом  $\frac{1}{3}$  в направлении  $Y$  (рис. 11.2).

После диагонализации двух из восьми инфинитезимальных операторов действие оставшихся шести операторов  $T_{\pm}$ ,  $U_{\pm}$  и  $V_{\pm}$  легко изобразить на  $(M_T, Y)$ -плоскости

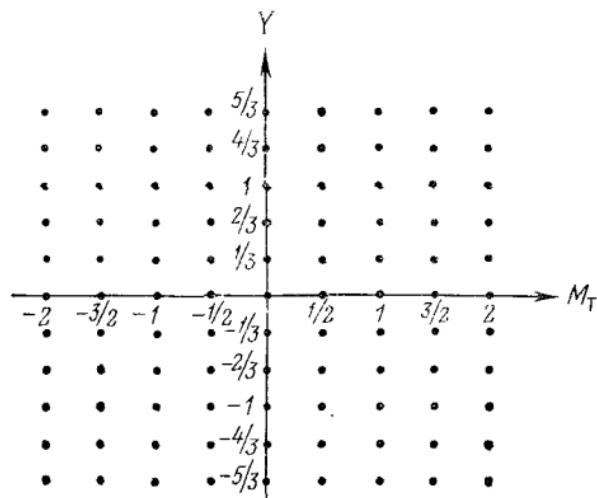


Рис. 11.2.

сти. Так как  $T_{\pm}$  — это обычные повышающий и понижающий величину  $M_T$  операторы (гл. 7, § 4, п. Б), коммутирующие с  $Y$ , результат действия операторов  $T_{\pm}$  на ба-

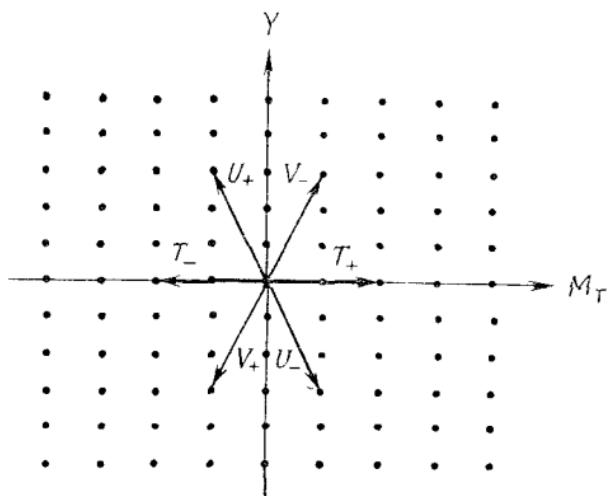


Рис. 11.3.

зисный вектор, изображенный точкой  $(M_T, Y)$ , изображается точками  $(M_T \pm 1, Y)$ . Таким образом, операторы  $T_{\pm}$  соответствуют сдвигам на  $\pm 1$  в направлении оси

$M_T$ . Точно так же из перестановочных соотношений (11.3в) следует, что операторы  $U_{\pm}$  соответствуют сдвигам в  $(M_T, Y)$ -плоскости на векторы  $(\mp \frac{1}{2}, \pm 1)$ , а операторы  $V_{\pm}$  — на векторы  $(\mp \frac{1}{2}, \mp 1)$  (рис. 11.3).

Неприводимые представления характеризуются тем, что при помощи инфинитезимальных операторов из любого вектора пространства представления можно получить ба-

$\begin{matrix} x & \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x & \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x & \cdot & x \end{matrix}$

зис этого пространства. Из рис. 11.3 яствует, что величина  $Y$  может меняться только на целое число. Кроме того, если величина  $Y$  изменяется на нечетное число, то соответствующее изменение величины  $M_T$  является полуцелым. Таким образом, мы видим, что точки, соответствующие базисным векторам неприводимого представления, расположены в узлах гексагональной решетки, помеченных на рис. 11.4 крестиками. Такая конфигурация может быть реализована на сетке, показанной на рис. 11.2, тремя разными способами:

- 1) с узлом гексагональной решетки в точке  $(0, 0)$ ;
  - 2) с узлом в точке  $(0, \frac{2}{3})$ ;
  - 3) с узлом в точке  $(0, -\frac{2}{3})$ .
- (11.4)

Соответственно этому неприводимые представления распадаются на три типа. [Случай, когда узел гексагональной решетки расположен в точках  $(0, \pm \frac{1}{3})$ , должны быть исключены, так как тогда мы имели бы  $U_z = \pm \frac{1}{4}$ .]

Теперь нам необходимо выбрать такие точки на решетке, чтобы соответствующие базисные векторы порождали пространство неприводимого представления. Для этого рассмотрим в пространстве неприводимого представления  $D$  базисный вектор с наибольшим «весом», или «старший вектор». Под этим мы подразумеваем, что этому вектору  $|\psi\rangle$  соответствует максимальное значение  $Y$  и максимальное при этом  $Y$  значение  $M_T$ . (Можно было бы также определить старший вес, поменяв местами  $Y$  и  $M_T$ .) Из определения  $|\psi\rangle$  следует, что

$$T_+ |\psi\rangle = U_+ |\psi\rangle = V_- |\psi\rangle = 0, \quad (11.5)$$

так как операторы  $U_+$  и  $V_-$  повышают величину  $Y$ , а оператор  $T_+$  повышает величину  $M_T$ , оставляя величину  $Y$  неизменной. Таким образом, из соотношений (11.5), а также из определения операторов  $U_z$  и  $V_z$ , приведенного сразу после формул (11.3а), следует, что вектор  $|\Psi\rangle$  имеет определенные  $T$ -,  $U$ - и  $V$ -спины, равные

$$T = M_T, \quad U = M_U = \frac{3}{4} Y - \frac{1}{2} M_T,$$

$$V = -M_V = \frac{3}{4} Y + \frac{1}{2} M_T.$$

Этот вектор принято обозначать парой целых чисел  $\lambda=2T$  и  $\mu=2U$ , так что  $V=1/2(\lambda+\mu)$ , а координаты соответствующей точки решетки равны

$$M_T = \frac{1}{2} \lambda, \quad Y = \left( \frac{1}{3} \lambda + 2\mu \right). \quad (11.6)$$

Теперь мы можем показать, что всем базисным векторам представления  $D$  соответствуют точки решетки, рас-

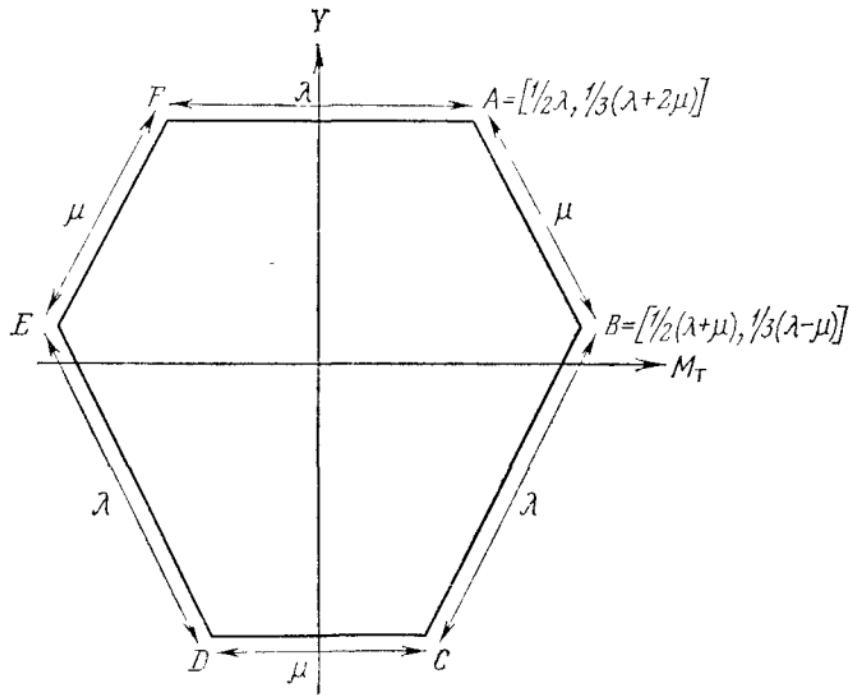


Рис. 11.5.

положенные на сторонах или внутри шестиугольника, изображенного на рис. 11.5. Стороны этого шестиугольника параллельны векторам, изображенным на рис. 11.3.

Длины сторон  $\lambda$  и  $\mu$  равны числу промежутков между узлами решетки. (Чтобы перейти к реальным длинам, нужно уменьшить масштаб по оси  $Y$  в  $1/\sqrt{2}$  раз.) Начав с точки  $A$ , соответствующей старшему вектору  $|\Psi\rangle$ , мы можем при помощи оператора  $T_-$  последовательно уменьшить  $M_T$  на  $\lambda$  единиц. Так мы достигнем точки  $F$ . Из определения старшего вектора следует, что ни одна точка решетки, соответствующая базисному вектору пространства представления  $D$ , не может лежать выше линии  $AF$ . Аналогично, последовательное применение к вектору  $|\Psi\rangle$  оператора  $U_-$  даст  $U$ -спиновый мультиплет, состоящий из  $\mu+1$  точек решетки, лежащих на линии  $AB$ . Базисные векторы, соответствующие точкам на линии  $AB$ , имеют вид  $U_-^n |\Psi\rangle$ . Из равенств (11.3г) следует, что  $T_+ U_-^n |\Psi\rangle = -U_-^n T_+ |\Psi\rangle = 0$  и  $V_- U_-^n |\Psi\rangle = 0$ . Поэтому справа от линии  $AB$  нет точек решетки, соответствующих базисным векторам представления  $D$ . Легко видеть, что координаты точки  $B$  таковы:

$$M_T = \frac{1}{2}(\lambda + \mu), \quad Y = \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) - \mu = \frac{1}{3}(\lambda - \mu).$$

Теперь можно достроить весь шестиугольник  $ABCDEF$ , руководствуясь соображениями симметрии. Во-первых, имеется симметрия относительно оси  $Y$ , связанная с симметрией значений  $M_T$  в  $T$ -спиновой подгруппе  $SU_2$ . Такая же симметрия относительно  $U$ -спина и  $V$ -спина приводит к зеркальной симметрии относительно двух диагоналей, изображенных на рис. 11.5. Мы получили такой шестиугольник, что все базисные векторы пространства неприводимого представления соответствуют точкам, лежащим внутри него или на его сторонах. (Отметим, что упомянутая «зеркальная» симметрия имеет место по отношению к узлам решетки. Чтобы превратить ее в настоящую зеркальную симметрию, нужно уменьшить масштаб  $Y$  в  $1/\sqrt{2}$  раз.)

Каждому узлу решетки на линии  $ABC$  соответствует  $T$ -спиновый мультиплет, пересекающий шестиугольник в горизонтальном направлении до линии  $FED$ . Точки этого мультиплета получаются последовательным применением оператора  $T_-$ . Аналогично каждый узел решетки, лежащий на линии  $AFC$ , порождает  $U$ -спиновый мультиплет, пересекающий шестиугольник до линии  $BCD$ , а  $V$ -спино-

вые мультиплеты соединяют линии  $BAF$  и  $CDE$ . Таким образом, начав с точки  $A$ , заданной двумя целыми числами  $\lambda$  и  $\mu$ , мы можем получить неприводимое представление, базисные векторы которого соответствуют точкам, лежащим на сторонах и внутри шестиугольника  $ABCDEF$  (рис. 11.5). Мы будем обозначать это неприводимое представление через  $D^{(\lambda,\mu)}$  или просто через  $(\lambda\mu)$ . Из нашего построения видно, что каждому узлу решетки внутри шестиугольника соответствует базисный вектор. Но, вообще говоря, одной точке могут соответствовать несколько линейно независимых базисных векторов. Можно показать (задача 11.6), что каждому узлу решетки на стороне шестиугольника соответствует один и только один базисный вектор. Если мы соединим между собой ближайшие к сторонам шестиугольника внутренние узлы решетки, то получим меньший шестиугольник, вписанный в исходный. Можно показать, что каждой точке этого шестиугольника соответствует по два линейно независимых базисных вектора. Такое построение можно продолжать и далее, увеличивая на каждом шаге число линейно независимых базисных векторов, соответствующих узлам решетки, до тех пор, пока на очередном шаге вместо шестиугольника не получится треугольник. Начиная с этого момента, число линейно независимых векторов, соответствующих узлу решетки, остается постоянным. Путем такого построения можно показать (задача 11.7), что число линейно независимых базисных векторов пространства представления, т. е. размерность представления  $d(\lambda\mu)$ , дается выражением

$$d(\lambda\mu) = \frac{1}{2}(\lambda+1)(\mu+1)(\lambda+\mu+2). \quad (11.7)$$

Некоторые примеры приведены на рис. 11.6. Заметим, что если  $\mu=0$  или  $\lambda=0$ , то мы с самого начала имеем треугольник и, следовательно, каждой точке решетки соответствует один-единственный базисный вектор.

Остановимся более подробно на представлении  $D^{(11)}$ . Дело в том, что, во-первых,  $D^{(11)}$  — простейшее представление с двумя базисными векторами, соответствующими одной точке решетки, и, во-вторых, это представление имеет наибольшее значение в физических приложениях. Представление  $D^{(11)}$  содержит два мультиплета с  $T=\frac{1}{2}$  при  $Y=\pm 1$  и мультиплет с  $T=1$  при  $Y=0$ . Оставшийся

вектор, соответствующий точке  $(0, 0)$ , должен иметь  $T=0$ , так как в противном случае мы могли бы получить новые независимые векторы. Точки  $O=(0, 0)$  можно достичь из начальной точки  $A=(\frac{1}{2}, 1)$  многими путями, включая три

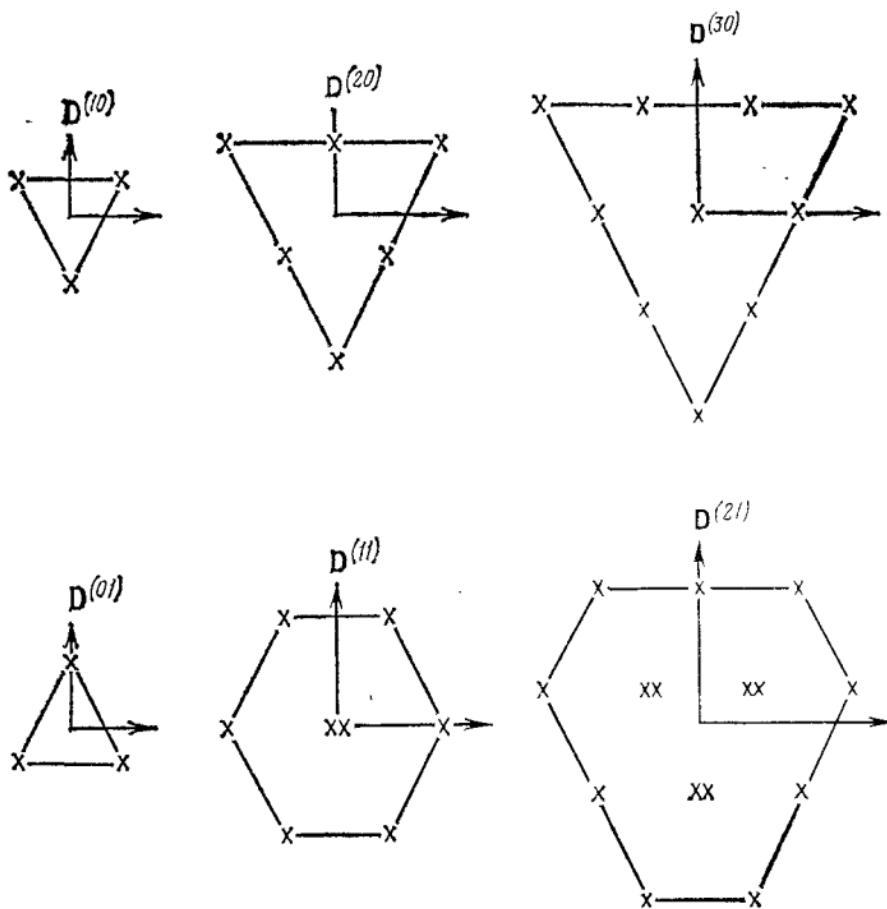


Рис. 11.6.

изображенных на рис. 11.7. Эти пути соответствуют следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned} AO \quad & V_+ |\psi\rangle = \sqrt{2} |V=1\rangle, \\ ABO \quad & T_- U_- |\psi\rangle = \sqrt{2} |T=1\rangle, \\ AFO \quad & U_- T_- |\psi\rangle = \sqrt{2} |U=1\rangle. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Так как состояние  $|\psi\rangle$  имеет  $M_V=-1$  и, следовательно,  $V=1$ , то путь  $AO$  должен привести к состоянию с  $V=1$  и  $M_V=0$ . Множитель  $\sqrt{2}$  в соотношениях (11.8) возникает

из-за определения (7.40) повышающего оператора  $V_+$ . Точно так же  $U_-|\psi\rangle$  есть состояние с  $M_T=1$  и, следовательно,  $T=1$ . Таким образом,  $T_-U_-|\psi\rangle$  имеет  $T=1$  и  $M_T=0$ . Аналогично путь  $AFO$  приводит к состоянию с  $U=1$ . Мы построили три на первый взгляд различных вектора, соответствующих точке  $(0, 0)$ . Однако эти векторы не являются линейно независимыми. В самом деле, соотношение  $[U_-, T_-]=V_+$  [формула (11.3г)] непосредственно приводит к линейной зависимости  $|U=1\rangle - |T=1\rangle = |V=1\rangle$ . В качестве базисных векторов необходимо выбрать две ортогональные друг другу комбинации этих трех векторов. По разным причинам удобно выбрать векторы  $|T=1\rangle$  и  $|T=0\rangle$ , которые должны быть взаимно ортогональными. Воспользовавшись еще раз перестановочными соотношениями (11.3г), можно показать, что  $|T=0\rangle = (1/\sqrt{3})\{|U=1\rangle + |V=1\rangle\}$ . Для этого достаточно показать, что  $T_+ \{|U=1\rangle + |V=1\rangle\} = 0$ . Множитель  $1/\sqrt{3}$  возникает из-за того, что состояния  $|U=1\rangle$  и  $|V=1\rangle$  не ортогональны:

$$\begin{aligned} \langle V=1 | U=1 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \psi | V_- U_- T_- | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \psi | U_- V_- T_- | \psi \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi | T_+ T_- | \psi \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \psi | U_- T_- V_- | \psi \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi | U_- U_+ | \psi \rangle + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Переходя к базисным векторам  $|T=1\rangle$  и  $|T=0\rangle$ , получаем

$$\begin{aligned} |U=1\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{3}|T=0\rangle + \frac{1}{2}|T=1\rangle, \\ |V=1\rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{3}|T=0\rangle - \frac{1}{2}|T=1\rangle, \end{aligned}$$

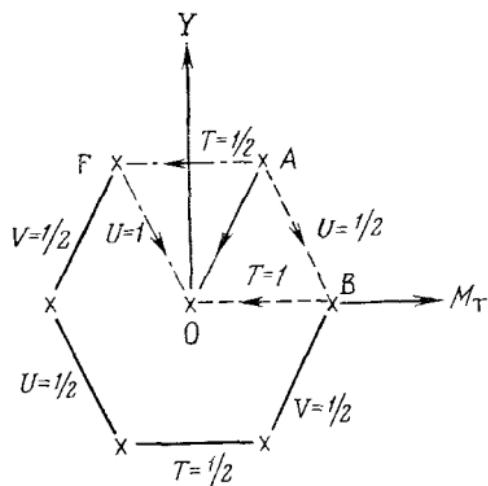


Рис. 11.7.

а из ортогональности следует, что

$$|U=0\rangle = \frac{1}{2}|T=0\rangle - \frac{1}{2}\sqrt{3}|T=1\rangle, \quad (11.9)$$

$$|V=0\rangle = \frac{1}{2}|T=0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}|T=1\rangle.$$

## A. Комплексно-сопряженные представления

Матрицы, комплексно-сопряженные матрицам представления  $D$  некоторой группы, также образуют представление этой группы, обозначаемое символом  $D^*$ . Для исследования представления  $D^*$  проще всего рассмотреть соответствующие инфинитезимальные операторы. Из определений (11.1) и (11.2) следует, что комплексное сопряжение инфинитезимальных операторов  $X_i$  группы  $SU_3$  приводит к изменению знаков  $T_z$  и  $Y$  и к тому, что остальные шесть повышающих и понижающих операторов меняются ролями. На  $(M_T, Y)$ -плоскости это приводит к отражению диаграммы относительно обеих осей, что эквивалентно (рис. 11.5) замене  $\mu$  на  $\lambda$  и наоборот. Таким образом, представление  $D^{(01)}$ , например, эквивалентно представлению, комплексно-сопряженному представлению  $D^{(10)}$ . В то же время представление  $D^{(11)}$  с  $\lambda=\mu$  действительно, т. е. эквивалентно своему комплексно сопряженному. (В случае группы  $\mathcal{R}_3$  или  $SU_2$  комплексное сопряжение меняет  $m$  на  $-m$ , так что  $D^{(j)}$  и  $D^{(j)*}$  эквивалентны; гл. 7, § 7.)

## B. Произведение представлений

Разложение произведения двух неприводимых представлений группы  $\mathcal{R}_3$  определено формулой (7.44). Соответствующее соотношение

$$D^{(\lambda_1\mu_1)} \otimes D^{(\lambda_2\mu_2)} = \sum_{\lambda\mu} C(\lambda\mu) D^{(\lambda\mu)} \quad (11.10)$$

можно написать и для группы  $SU_3$ , хотя в этом случае правило, которым по данным  $(\lambda_1\mu_1)$  и  $(\lambda_2\mu_2)$  определяются коэффициенты  $C(\lambda\mu)$ , выглядит весьма сложно. Но при малых значениях  $\lambda$  и  $\mu$ , зная как разлагаются на неприводимые представления произведения неприводимых пред-

ствлений группы  $SU_2 \times U_1$ , являющейся подгруппой группы  $SU_3$ , эти коэффициенты вычислить довольно просто. Неприводимые представления группы  $SU_2 \times U_1$  определяются величинами  $T$  и  $Y$ . Произведение представлений  $T_1$ ,  $Y_1$  и  $T_2$ ,  $Y_2$  разлагается на сумму представлений с  $T = (T_1 + T_2)$ ,  $(T_1 + T_2 - 1)$ , ...,  $|T_1 - T_2|$  и  $Y = Y_1 + Y_2$ . Мы использовали здесь обычное правило сложения моментов для группы  $SU_2$  (или  $\mathcal{R}_3$ ) и аддитивный закон для  $Y$  (гл. 11, § 5). Приведем для иллюстрации несколько примеров.

Рассмотрим произведение  $D^{(10)} \otimes D^{(10)}$ . Так как пространство каждого сомножителя содержит базисные векторы с  $T = 1/2$ ,  $Y = 1/3$  и  $T = 0$ ,  $Y = -2/3$ , то пространство произведения содержит базисные векторы, соответствующие комбинациям  $T$  и  $Y$ , данным в первой строке табл. 11.2, а.

Таблица 11.2, а

	$Y = 2/3$	$-1/3$	$-4/3$
$D^{(10)} \otimes D^{(10)}$	$T = 1, 0$	$1/2, 1/2$	0
$D^{(20)}$	$T = 1$	$1/2$	0
$D^{(01)}$	$T = 0$	$1/2$	—

Таблица 11.2, б

	$Y = 1$	0	-1
$D^{(10)} \otimes D^{(01)}$	$T = 1/2$	$1, 0, 0$	$1/2$
$D^{(11)}$	$1/2$	$1, 0$	$1/2$
$D^{(00)}$	—	0	—

(Конечно, подразумевается, что данному значению  $T$  соответствует мультиплет  $2T+1$  базисных векторов с  $M_T = T, T-1, \dots, -T$ .) Обозначение  $1/2, 1/2$  указывает на то, что имеются два мультиплета с  $T = 1/2$ , соответствующих значениям  $T = 1/2$  и  $T = 0$  для первого и второго сомножителя, и наоборот. Наибольший вес, представленный в первой строке таблицы, есть  $M_T = 1, Y = 2/3$ . Отсюда мы заключаем, что наше произведение должно содержать

представление  $D^{(20)}$ . [Мы воспользовались формулой (11.6), связывающей значения  $\lambda$  и  $\mu$  со значениями  $M_T$  и  $Y$  старшего вектора.] Комбинации величин  $T$  и  $Y$ , соответствующие представлению  $D^{(20)}$ , приведены во второй строке таблицы. Можно убедиться, что оставшиеся базисные векторы в точности соответствуют представлению  $D^{(01)}$ . Таким образом, мы приходим к заключению, что

$$D^{(10)} \otimes D^{(10)} = D^{(20)} \oplus D^{(01)}.$$

Аналогично табл. 11.2, б иллюстрирует разложение

$$D^{(10)} \otimes D^{(01)} = D^{(11)} \oplus D^{(00)}.$$

Точно так же, как и в первом случае, можно показать, что  $D^{(11)} \otimes D^{(11)} = D^{(22)} \oplus D^{(03)} \oplus D^{(30)} \oplus 2D^{(11)} \oplus D^{(00)}$ . (11.11)

Формула (11.11) пригодится нам в дальнейшем. Здесь же она показывает, что группа  $SU_3$  не является «просто приводимой» (см. определение в гл. 4, § 17): в разложение (11.11) представление  $D^{(11)}$  входит дважды. В заключение отметим, что все вышеперечисленные результаты можно получить из общего правила для разложения произведения представлений группы  $U_N$  на неприводимые (т. 2, гл. 18, § 5).

## § 7. КЛАССИФИКАЦИЯ АДРОНОВ ПО $SU_3$ -МУЛЬТИПЛЕТАМ

Кратко ознакомившись с неприводимыми представлениями группы  $SU_3$ , обратимся снова к элементарным частицам (табл. 11.1) и покажем, что адроны можно сгруппировать в  $SU_3$ -мультиплеты. Мы отождествим  $T$ -спиновую подгруппу группы  $SU_3$  с группой изоспиновой симметрии  $SU_2$ , а инфинитезимальный оператор  $Y$  с оператором гиперзаряда. Таким образом,  $SU_3$  есть расширение изоспиновой группы, включающее группу  $U_1$ , соответствующую гиперзаряду.

Первые восемь барионов из табл. 11.1 имеют спин  $1/2$ . Имея это по этой причине мы поместили  $\Xi$  перед  $\Delta$ , хотя масса  $\Xi$ -частиц немного больше.) Если мы теперь посмотрим внимательнее на значения  $T$  и  $Y$  этих восьми частиц, то убедимся, что они в точности такие же, как и значения соответствующих операторов на базисных векторах пространства представления  $D^{(11)}$  группы  $SU_3$  (рис. 11.6 и