Соответствующие вычисления в принципе не отличаются от выполненных нами в гл. 10, § 1, п. Б, и мы не будем более углубляться в эти вопросы.

§ 10. ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА

В гл. 7, § 5 мы построили для случая группы $\mathcal{R}_3$ оператор Казимира $\mathbf{J}^2$, коммутирующий со всеми групповыми операторами. Следовательно, по лемме Шура в неприводимом представлении $\mathsf{D}^{(j)}$ этот оператор кратен единичному. Соответствующий множитель равен $j(j+1)$, и индекс представления j можно также рассматривать как индекс, нумерующий собственные значения оператора $\mathbf{J}^2$. В случае группы SU_3, неприводимые представления которой нумеруются двумя индексами λ и μ, имеется два независимых оператора Казимира — квадратичный и кубичный по инфинитезимальным операторам.

Простейший способ построения этих операторов — использовать декартовы обозначения для операторов (11.2), подчеркивающие равноправие трех измерений. Обозначим через A_i^j матрицу 3×3 вида

$$(\mathsf{A}_i^j)_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{11.19}$$

При $i\neq j$ все элементы матрицы A_i^j, кроме $(\mathsf{A}_i^j)_{ij}=1$, равны нулю. При $i=j$ отличие состоит в том, что добавляется матрица $-{}^1/_3\delta_{kl}$. Этим обеспечивается равенство нулю следа матрицы A_i^j при любых i и j. Три диагональные матрицы связаны между собой соотношением $\mathsf{A}_1^1+\mathsf{A}_2^2+\mathsf{A}_3^3=0$. Таким образом, остается восемь независимых матриц. Соотношение между ними и матрицами (11.2) таково:

$$\mathsf{A}_1^2=\mathsf{T}_+,\quad \mathsf{A}_2^1=\mathsf{T}_-,\quad \mathsf{A}_3^2=\mathsf{U}_+,$$
$$\mathsf{A}_3^1=\mathsf{U}_-,\quad \mathsf{A}_3^1=\mathsf{V}_+,\quad \mathsf{A}_1^3=\mathsf{V}_-,$$
$$\mathsf{A}_3^3=-\mathsf{Y},\quad \mathsf{A}_1^1-\mathsf{A}_2^2=2\mathsf{T}_z.$$

Из определения (11.19) следуют перестановочные соотношения

$$[\mathsf{A}_i^j,\ \mathsf{A}_k^l]=\delta_{jk}\mathsf{A}_i^l-\delta_{il}\mathsf{A}_k^j. \tag{11.20}$$

Исходя из формулы (11.20), нетрудно показать, что оператор $\mathsf{C}_2=\sum\limits_{i,j}\mathsf{A}_i^j\mathsf{A}_j^i$ коммутирует со всеми A_k^l и, следова-

тельно, является оператором Казимира. Точно так же оператор $C_3 = \sum_{i,j,k} A_j^k A_i^j A_k^i$ коммутирует со всеми инфинитезимальными операторами, т. е. является вторым оператором Казимира. Такие рассуждения можно было бы продолжить, но все операторы более высокого порядка выражаются через C_2 и C_3.

Собственные значения операторов C_2 и C_3 в представлении $D^{(\lambda\mu)}$ можно определить по их действию на старший вектор. К такому же результату привело бы и использование любого другого базисного вектора; выбор старшего вектора диктуется соображениями удобства. С учетом перестановочных соотношений (11.20) мы можем записать C_2 в виде

$$C_2 = \sum_i (A_i^i)^2 + \sum_{i<j} (A_i^i A_j^i + A_j^i A_i^j) = \\ = \sum_i (A_i^i)^2 + \sum_{i<j} (2A_j^i A_i^j + A_i^i - A_j^j).$$

Но для старшего вектора $|\psi\rangle$ выполняется равенство $A_i^j|\psi\rangle = 0$ при $i<j$. Кроме того,

$$A_3^3|\psi\rangle = -Y|\psi\rangle = -\frac{1}{3}(\lambda+2\mu)|\psi\rangle,$$

$$(A_1^1 - A_2^2)|\psi\rangle = 2M_T|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = 0.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$C_2|\psi\rangle = \left\{\frac{2}{3}(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu) + 2(\lambda+\mu)\right\}|\psi\rangle. \quad (11.21)$$

Аналогично можно вычислить оператор C_3. Но удобнее ввести оператор

$$C_3' = \frac{1}{2}\sum_{ijk}(A_j^k A_i^j A_k^i + A_j^i A_j^k A_k^i) = C_3 + \frac{3}{2}C_2.$$

Его собственное значение в представлении $D^{(\lambda\mu)}$ дается выражением

$$C_3'|\psi\rangle = \frac{1}{9}(\lambda-\mu)(2\lambda+\mu+3)(2\mu+\lambda+3)|\psi\rangle. \quad (11.22)$$

Собственные значения операторов C_2 и C_3 могут быть использованы для параметризации неприводимых представлений группы SU_3 точно так же, как собственное значение оператора $\mathbf{J}^2$ в случае группы $\mathcal{R}_3$.