12

СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ В ЯДРАХ И СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ — ГРУППЫ SU_4 И SU_6. КВАРКОВЫЕ МОДЕЛИ

В гл. 8, где речь шла о строении атома, мы видели, что независимость взаимодействия от спина приводит к группе симметрии $\mathcal{R}_3^S$ и квантовому числу S. Аналогичная ситуация имеет место в ядрах (гл. 10): зарядовая независимость взаимодействия проявляется в наличии изоспиновой SU_2-симметрии и квантового числа T. В данной главе мы сначала рассмотрим следствия, вытекающие из предположения о том, что ядерные силы не только зарядово-, но и спиново-независимы. Это приведет к объединению групп $\mathcal{R}_3^S$ и SU_2 в группе SU_4. Перейдя к элементарным частицам, мы аналогичным образом объединим группы SU_3 и $\mathcal{R}_3^S$ в рамках группы SU_6. После этого мы познакомимся с новейшими гипотезами о составной природе мезонов и барионов как частиц, состоящих из еще более элементарных объектов, названных кварками.

§ 1. ЯДЕРНЫЕ СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ

Ядро состоит из A нуклонов, каждый из которых описывается обычными пространственными координатами и, кроме того, имеет четыре независимых внутренних состояния. Это два спиновых состояния с проекциями спинового момента на выделенную ось, равными $\pm 1/2$, и два зарядовых состояния — протон и нейтрон. Эти состояния удобно обозначать символами $p^\uparrow$, $n^\uparrow$, $p^\downarrow$, $n^\downarrow$, где стрелки соответствуют двум спиновым состояниям $\pm 1/2$. В полной аналогии с тем, как в гл. 10, § 1 вводилась группа SU_2, действующая в линейном пространстве, натянутом на векторы состояния p и n, можно ввести группу унитарных преобразований SU_4, действующую в пространстве, порожденном состояниями $p^\uparrow$, $n^\uparrow$, $p^\downarrow$, $n^\downarrow$. Если взаимодействие между нуклонами в дополнение к зарядовой независимости не

зависит также и от спина, то полной группой симметрии можно считать группу SU_4 [1]. На самом деле ядерное взаимодействие обнаруживает довольно сильную зависимость от спина, так что SU_4 является лишь группой приближенной симметрии. Тем не менее мы вкратце рассмотрим группу SU_4 и следствия SU_4-инвариантности. Отчасти это будет подготовкой к изучению SU_6-симметрии. Как SU_6, так и SU_4 — это частные случаи группы SU_N, которой посвящена гл. 18 (т. 2).

Группа SU_3 имеет $3^2-1=8$ параметров, а в группе SU_4 их $4^2-1=15$. Пятнадцать инфинитезимальных операторов в однонуклонном пространстве имеют вид s_q, t_q и $\mathsf{s}_q\mathsf{t}_{q'}$, где s и t — обычные одночастичные операторы спина и изоспина, а q, q' — x, y, z. Для системы из A нуклонов соответствующие операторы таковы:

$$\mathsf{S}_q=\sum_{i=1}^{A}\mathsf{s}_q(i),\quad \mathsf{T}_q=\sum_{i=1}^{A}\mathsf{t}_q(i),\quad \mathsf{Y}_{qq'}=2\sum_{i=1}^{A}\mathsf{s}_q(i)\,\mathsf{t}_{q'}(i).$$

(Заметим, что $\mathsf{Y}_{qq'}\neq 2\mathsf{S}_q\mathsf{T}_{q'}$.) Шесть операторов S_q, T_q порождают подгруппу вида $\mathcal{R}_3^S\times SU_2$ (или, вследствие гомоморфизма между $\mathcal{R}_3$ и SU_2, подгруппу $SU_2^S\times SU_2^T$). Верхними индексами S и T различаются спиновая и изоспиновая группы SU_2. (Заметим, что оператор $\mathsf{Y}_{qq'}$ не имеет отношения к оператору гиперзаряда Y.)

Свойства неприводимых представлений группы SU_4 можно установить, прямо обобщив все сказанное в гл. 11, § 6 относительно группы SU_3. Три из пятнадцати инфинитезимальных операторов можно одновременно диагонализовать; обычно для этого выбирают операторы S_z, T_z и Y_{zz}. (Подчеркнем, что в обозначении S_z индекс z относится к направлению в обычном пространстве, а в обозначении T_z — к направлению в абстрактном пространстве, связанном с зарядовой степенью свободы.) Таким образом, в случае группы SU_4 диаграммы, аналогичные изображенным на рис. 11.6, трехмерны, а неприводимые представления обозначаются обычно символом $\mathsf{D}^{(PP'P'')}$. Здесь P, P' и P'' — собственные значения операторов S_z, T_z и Y_{zz} для базисного вектора с наибольшим весом. Другими словами, P — это максимальное собственное значение M_S оператора S_z, P' — максимальное собственное значение M_T оператора T_z на подпространстве с $M_S=P$, а P'' —

максимальное собственное значение оператора Y_{zz} на подпространстве с $M_S=P$, $M_T=P'$.

Мы не будем пытаться исследовать свойства произвольных неприводимых представлений группы SU_4, как мы проделали это для группы SU_3, поскольку это связано со сложными выкладками. (Относительно общего случая группы SU_N см. т. 2, гл. 18.) Вместо этого мы подробно остановимся на простейших представлениях, появляющихся при исследовании систем из двух или трех нуклонов. При этом мы будем пользоваться понятием симметрии вектора состояния относительно перестановок аргументов, а также наличием в группе SU_4 подгруппы $SU_2^S \times SU_2^T$. Последнее означает, что, как говорилось в гл. 4, § 18, любое представление группы SU_4 есть сумма неприводимых представлений $\mathsf{D}^{(S)} \otimes \mathsf{D}^{(T)}$ группы $SU_2^S \times SU_2^T$. Следовательно, любое представление $\mathsf{D}^{(PP'P'')}$ группы SU_4 характеризуется некоторым набором значений S и T и образует «супермультиплет»:

$$\mathsf{D}^{(PP'P'')} = \sum_{ST} m_{S,T} \mathsf{D}^{(S)} \otimes \mathsf{D}^{(T)}, \tag{12.1}$$

где m_{ST} — неотрицательные целые числа.

Четыре состояния нуклона порождают пространство, на котором определено действие группы SU_4, образуя базис ее четырехмерного неприводимого представления $\mathsf{D}^{(1/2\ 1/2\ 1/2)}$. Так как все четыре состояния имеют $S=T=1/2$, это представление остается неприводимым при сужении на подгруппу $SU_2^S \times SU_2^T$. Таким образом, $\mathsf{D}^{(1/2\ 1/2\ 1/2)} = \mathsf{D}^{(1/2)} \otimes \mathsf{D}^{(1/2)}$.

Пространство L внутренних состояний двух нуклонов имеет размерность $4^2=16$. В этом пространстве действует представление группы SU_4. Однако это представление приводимо, в чем можно убедиться, разложив L на два подпространства L_s и L_a. Эти подпространства состоят из состояний, симметричных и антисимметричных по отношению к перестановкам внутренних координат. Инфинитезимальные операторы группы SU_4 инвариантны по отношению к таким перестановкам и, значит, не смешивают состояний из L_s и L_a. Таким образом, в каждом из подпространств L_s и L_a действует представление группы SU_4. Чтобы определить структуру этих представлений по отношению к подгруппе $SU_2^S \times SU_2^T$, воспользуемся тем,

что, как показано в гл. 8, § 6, п. Г, состояние с $S=1$ симметрично, а с $S=0$ антисимметрично по отношению к перестановкам спиновых переменных. С учетом аналогичного утверждения для изоспина системы из двух частиц получаем, что при одновременных перестановках спиновых и изоспиновых переменных состояния группируются следующим образом:

$$L_s: \begin{cases} S=1, & T=1; \\ S=0, & T=0. \end{cases} \quad L_a: \begin{cases} S=1, & T=0; \\ S=0, & T=1. \end{cases} \tag{12.2}$$

Здесь мы воспользовались тем, что произведение двух нечетных функций есть, очевидно, четная функция и т. д. (т. е. фактически разложением произведения двух неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_2$). Учитывая, что размерность представления $\mathsf{D}^{(S)}$ равна $(2S+1)$, получаем, что подпространства L_s и L_a имеют размерности 10 и 6. (Как и должно быть, в сумме это дает 16.) На основании общих соображений можно показать, что представления, действующие в пространствах L_s и L_a, неприводимы и имеют тип $\mathsf{D}^{(111)}$ и $\mathsf{D}^{(100)}$. Таким образом, формула (12.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathsf{D}^{(111)} &= \mathsf{D}^{(1)} \otimes \mathsf{D}^{(1)} \oplus \mathsf{D}^{(0)} \otimes \mathsf{D}^{(0)}, \\ \mathsf{D}^{(100)} &= \mathsf{D}^{(1)} \otimes \mathsf{D}^{(0)} \oplus \mathsf{D}^{(0)} \otimes \mathsf{D}^{(1)}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

В качестве примера можно привести состояния

$$\begin{aligned} &|T=S=1,\ M_T=M_S=1\rangle = p^{\uparrow}(1)\,p^{\uparrow}(2), \\ &|T=1,\ S=0,\ M_T=1,\ M_S=0\rangle = \\ &\qquad = \{p^{\uparrow}(1)\,p^{\downarrow}(2) - p^{\uparrow}(2)\,p^{\downarrow}(1)\}/\sqrt{2}, \\ &|T=1,\ S=0,\ M_T=M_S=0\rangle = \{p^{\uparrow}(1)\,n^{\downarrow}(2) - p^{\uparrow}(2)\,n^{\downarrow}(1) - \\ &\qquad - p^{\downarrow}(1)\,n^{\uparrow}(2) + p^{\downarrow}(2)\,n^{\uparrow}(1)\}/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

В случае трех частиц мы выполним такую же процедуру, используя теперь, как в гл. 8, § 6, п. Г, некоторые простейшие свойства группы $\mathscr{S}_3$. Всего мы имеем теперь $4^3=64$ состояния, которые порождают векторное пространство L, разлагающееся в сумму $L=L_s+L_{m_1}+L_{m_2}+L_a$ соответственно трем неприводимым представлениям $\mathsf{T}^{(s)}$,

$\mathsf{T}^{(m)}$ и $\mathsf{T}^{(a)}$ группы $\mathcal{S}_3$. Поскольку представление $\mathsf{T}^{(m)}$ двумерно, имеются два подпространства L_{m_1} и L_{m_2}, преобразующиеся по отношению к перестановкам как первая и вторая строка матрицы $\mathsf{T}^{(m)}$. Такое разбиение пространства L служит примером применения формулы (4.52), в которую входят проекционные операторы. Перестановочная симметрия операторов группы SU_4 снова предотвращает смешивание четырех вышеуказанных подпространств пространства L при действии на нем этой группы. Таким образом, в каждом из этих подпространств определено представление группы SU_4. Эти представления также являются неприводимыми. Однако представления, действующие в L_{m_1} и L_{m_2}, эквивалентны, так как операторы перестановки, коммутирующие с действием группы SU_4, переводят эти подпространства друг в друга. Чтобы описать сужение этих представлений на подгруппу $SU_2^S \times \times SU_2^T$, мы начнем с утверждения (гл. 8, § 6, п. Г) о том, что состояния трех частиц со спином $^1/_2$, имеющие полный спин $S={}^3/_2$, полностью симметричны, а состояния с $S={}^1/_2$ *имеют смешанный тип симметрии* $\mathsf{T}^{(m)}$. *Воспользовавшись* аналогичным утверждением для изоспина, а также известным разложением на неприводимые представления произведения представлений группы $\mathcal{S}_3$ (гл. 8, § 6, п. Г)

$$\mathsf{T}^{(s)} \otimes \mathsf{T}^{(s)} = \mathsf{T}^{(s)}, \quad \mathsf{T}^{(s)} \otimes \mathsf{T}^{(m)} = \mathsf{T}^{(m)},$$
$$\mathsf{T}^{(m)} \otimes \mathsf{T}^{(m)} = \mathsf{T}^{(s)} \oplus \mathsf{T}^{(m)} \oplus \mathsf{T}^{(a)},$$

получаем, что по отношению к одновременным перестановкам спиновых и изоспиновых переменных состояния группируются так:

$$\begin{aligned}
&L_s: \begin{cases} S=\frac{3}{2}, & T=\frac{3}{2}, \\ S=\frac{1}{2}, & T=\frac{1}{2}, \end{cases} \\
&L_m: \begin{cases} S=\frac{3}{2}, & T=\frac{1}{2}, \\ S=\frac{1}{2}, & T=\frac{3}{2}, \\ S=\frac{1}{2}, & T=\frac{1}{2}, \end{cases} \\
&L_a: \quad S=\frac{1}{2}, \quad T=\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Размерность этих трех представлений равна 20, 20 и 4. Учитывая удвоение представления, действующего в пространстве L_m, имеем $20+2\times20+4=64$ — размерность пространства L. Описанные нами представления — это $\mathsf{D}^{(3/2\ 3/2\ 3/2)}$, $\mathsf{D}^{(3/2\ 1/2\ 1/2)}$ и $\mathsf{D}^{(1/2\ 1/2\ -1/2)}$. Формула (12.1) принимает в данном случае вид

$$\begin{gathered}\mathsf{D}^{(3/2\ 3/2\ 3/2)}=\mathsf{D}^{(3/2)}\otimes\mathsf{D}^{(3/2)}\oplus\mathsf{D}^{(1/2)}\otimes\mathsf{D}^{(1/2)},\\ \mathsf{D}^{(3/2\ 1/2\ 1/2)}=\mathsf{D}^{(3/2)}\otimes\mathsf{D}^{(1/2)}\oplus\mathsf{D}^{(1/2)}\otimes\mathsf{D}^{(3/2)}\oplus\mathsf{D}^{(1/2)}\otimes\mathsf{D}^{(1/2)},\\ \mathsf{D}^{(1/2\ 1/2\ -1/2)}=\mathsf{D}^{(1/2)}\otimes\mathsf{D}^{(1/2)}.\end{gathered}\tag{12.6}$$

Вернемся теперь к атомному ядру. Если бы сильное взаимодействие было спиново- и изоспиново-инвариантным, то группа SU_4 была бы группой симметрии. В этой ситуации мы должны ожидать наличия сильного вырождения, соответствующего размерности d неприводимого представления $\mathsf{D}^{(PP'P'')}$ группы SU_4. Экспериментально такое вырождение не наблюдается; это не так уж неожиданно, если учесть, что ядерные силы, как известно, существенно зависят от спина. Тем не менее SU_4-симметрия нарушается не полностью. Ярче всего она проявляется при β-распаде самых легких ядер. Оператор, ответственный за этот распад, пропорционален $\mathsf{Y}_{qq'}$. Систематика ядерных энергий связи также согласуется с SU_4-симметрией [2].

Заметим, наконец, что состояния (12.5) с различной перестановочной симметрией должны таким образом комбинироваться с волновыми функциями пространственных координат, чтобы в соответствии с принципом Паули полные волновые функции были антисимметричны. Так, представление $\mathsf{D}^{(1/2\ 1/2\ -1/2)}$ должно соответствовать симметричным волновым функциям пространственных координат. Это приводит к правилу Хунда для ядер, согласно которому низшим энергиям соответствуют супермультиплеты с меньшими значениями $(PP'P'')$. Доказательство проводится так же, как в гл. 8, § 6, п. Д (для атомов) и в гл. 10, § 1, п. А (для изоспина).