15

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

Значительная часть нашей книги посвящена пространственным симметриям. Насколько известно, пространство является однородным в том смысле, что эксперимент в одной лаборатории дает такой же результат, как и в другой, и что результат эксперимента не зависит от пространственной ориентации экспериментальной установки. Это означает, что законы природы инвариантны по отношению к сдвигам и вращениям, а отсюда следуют законы сохранения импульса, углового момента и все другие связанные с этой инвариантностью эффекты, о которых говорилось в предыдущих главах. (Система атомов в кристалле создает потенциал, который не имеет таких непрерывных симметрий и инвариантен лишь по отношению к конечным сдвигам и вращениям, как говорилось в гл. 14.) Время тоже считается однородным в том смысле, что эксперимент, проведенный сегодня, даст тот же результат, если его повторить, скажем, завтра. Из инвариантности относительно сдвигов во времени следует закон сохранения энергии. В уравнении Шредингера, из которого мы до сих пор исходили, учитывается такая инвариантность. Теория относительности Эйнштейна возникла на основе представления о том, что пространству и времени присуща более глубокая однородность, что законы природы инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, которые действуют в четырехмерном «пространстве» пространства-времени. Преобразования Лоренца включают в себя как частные случаи пространственные вращения, пространственные и временные сдвиги. В новой теории естественным образом возникает понятие массы покоя частицы, и оказывается, что уравнение Шредингера не инвариантно относительно преобразований Лоренца. Для того чтобы эта инвариантность имела место, необхо-

димо внести существенные изменения как в классическую, так и в квантовую механику. Правда, эти изменения существенны лишь при скоростях, близких к скорости света (т. е. порядка $3 \cdot 10^8$ м/с). Таким образом, для большинства классических и квантовых эффектов, касающихся структуры атомов, молекул и ядер, релятивистские поправки малы. В данной главе мы рассмотрим группы, связанные с преобразованиями Лоренца, и выясним, каким образом представления этих групп связаны с физическими величинами. Несобственные вращения, появляющиеся при учете пространственных отражений, также могут быть включены в четырехмерную теорию наряду с операцией обращения времени.

Понятие четырехмерного пространства вводится в § 2, где мы определяем группу Лоренца. Сдвигам в четырехмерном пространстве и группе Пуанкаре посвящен § 4. Несобственные преобразования, включающие отражения пространства и обращения времени, рассматриваются в § 3, 5 и 6. О физическом смысле преобразований кратко говорится в § 2, а физическую интерпретацию неприводимых представлений мы откладываем до двух заключительных параграфов. Первый параграф данной главы посвящен евклидовой группе, объединяющей повороты и сдвиги. Эта группа, будучи группой движений трехмерного пространства, строго говоря, не относится к теме данной главы, и с точки зрения физики она также представляет незначительный интерес. Мы начинаем именно с нее по следующим причинам. Во-первых, эта группа во многом подобна группе Пуанкаре, но в некоторых отношениях проще ее. Во-вторых, при изучении группы Пуанкаре нам встретится группа, изоморфная двумерной евклидовой группе, и результаты § 1 пригодятся нам. Читатель, интересующийся прежде всего четырьмя измерениями, может перейти сразу к § 4.

§ 1. ЕВКЛИДОВА ГРУППА $\mathcal{E}_3$

В предыдущих главах мы довольно подробно исследовали некоторые вопросы, связанные с вращениями и отражениями, а в гл. 14 описывали симметрию кристаллов при помощи конечных сдвигов и поворотов — «пространственных групп». Теперь мы переходим к изучению непре-

рывной группы сдвигов и вращений, следуя методу, использовавшемуся в § 9 для пространственных групп. Еще раз напомним, что данный параграф целиком посвящен трем измерениям.

А. Трансляции

Рассмотрим сначала группу трансляций в одном измерении. Эта группа имеет бесконечное число элементов $\mathsf{P}(\xi)$, соответствующих сдвигам вдоль оси x: $\mathsf{P}(\xi)x = x + \xi$, где $-\infty < \xi < \infty$. Группа трансляций — это абелева группа с групповым законом умножения $\mathsf{P}(\xi_1)\mathsf{P}(\xi_2) = \mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2)$. Этот закон умножения совпадает с законом умножения группы $\mathcal{R}_2$ (гл. 7, § 3). Следовательно, неприводимые представления группы трансляций одномерны и имеют вид

$$\mathsf{T}^{(k)}(\xi) = \exp(-ik\xi) \tag{15.1}$$

для произвольного k. Из-за отсутствия периодичности по переменной ξ *величина k не обязана быть целым числом.* Но для того, чтобы представление $\mathsf{T}^{(k)}$ было унитарным, величина k должна быть действительной. Преобразование функций определяется [формула (3.7)] как

$$\psi'(x) = \mathsf{T}(\xi)\psi(x) = \psi(\mathsf{P}(-\xi)x) = \psi(x - \xi),$$

так что функция $\psi(x) = \exp(ikx)$ преобразуется по неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(k)}$. В силу сказанного в гл. 7, § 3 инфинитезимальный оператор имеет вид $\mathsf{P}_x = -\partial/\partial x$.

Обобщение на трехмерный случай тривиально ввиду коммутативности всех сдвигов. Таким образом, трехмерная группа трансляций есть прямое произведение трех одномерных групп трансляций по осям x, y и z. Общий элемент группы обозначается через $\mathsf{P}(\boldsymbol{\rho})$ и определяется следующим образом:

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, \tag{15.2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки в трехмерном пространстве. Записав вектор $\boldsymbol{\rho}$ в виде $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$, мы убеждаемся, что группа трехмерных трансляций имеет три параметра и, следовательно, имеются три инфинитезимальных оператора P_x, P_y и P_z, которые на пространстве функций $\psi(\mathbf{r})$ даются

выражениями $-\partial/\partial x$, $-\partial/\partial y$ и $-\partial/\partial z$. Неприводимые представления являются очевидным обобщением неприводимых представлений, определенных равенством (15.1); они задаются тремя числами k_x, k_y и k_z, образующими вектор $\mathbf{k}$:

$$\mathsf{T}^{(\mathbf{k})}(\boldsymbol{\rho}) = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}). \tag{15.3}$$

Если гамильтониан квантовой системы трансляционно инвариантен, то инфинитезимальные операторы P_x, P_y и P_z представляют собой сохраняющиеся величины, а именно три компоненты полного импульса системы. В том виде, в каком они записаны здесь, эти операторы, будучи инфинитезимальными операторами унитарного преобразования, являются антиэрмитовыми. Но их можно сделать эрмитовыми, умножив на i. Размерность этих операторов также не совпадает с размерностью импульса, что можно исправить добавлением множителя $\hbar$. В действительности физические операторы импульса p_q определяются как $\mathsf{p}_q = i\hbar\mathsf{P}_q$. Причина, по которой эти операторы связываются с импульсом, состоит в том, что трансляционная инвариантность системы приводит к сохранению полного импульса (гл. 16, § 1).

Так как неприводимые представления группы трансляций одномерны, трансляционная инвариантность не приводит к вырождению, а проявляется в том, что собственные функции гамильтониана нумеруются индексом $\mathbf{k}$ неприводимого представления $\mathsf{T}^{(k)}$. Из выражения (15.3) для $\mathsf{T}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$ следует, что собственное значение инфинитезимального оператора P_q в состоянии с данным $\mathbf{k}$ есть $-ik_q$. Таким образом, импульс дается выражением $\hbar\mathbf{k}$. Наличие любого потенциала $V(\mathbf{r})$, зависящего от координаты $\mathbf{r}$ (кроме тривиального случая $V = \text{const}$), нарушает трансляционную инвариантность. Следовательно, в случае одной частицы трансляционная инвариантность имеет место только при условии, что частица движется свободно. Системы из более чем одной частицы с потенциалом взаимодействия вида $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ очевидным образом трансляционно инвариантны, и, следовательно, полный импульс таких систем сохраняется.

Б. Групповые операторы

Евклидова группа $\mathscr{E}_3$ в трех измерениях порождается произведениями собственных вращений $\mathsf{R}(a)$ и трансляций $\mathsf{P}(\rho)$. Здесь $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ — параметры вращения $\mathsf{R}(\mathbf{a})$ в обозначениях гл. 7, § 4. Следовательно, общий элемент группы можно записать в виде $\mathsf{P}(\rho)\mathsf{R}(a)$, а его действие на вектор $\mathbf{r}$ дается выражением

$$\mathsf{P}(\rho)\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathbf{r}=\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathbf{r}+\rho \tag{15.4}$$

с учетом формулы (15.2). Отметим, что сдвиги и вращения не коммутируют (геометрически это очевидно). В самом деле, обращая порядок операторов в произведении (15.4), получаем $\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathsf{P}(\rho)\mathbf{r}=\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathbf{r}+\mathsf{R}(\mathbf{a})\rho$.

Отсюда следует, что

$$\mathsf{P}(\rho)\mathsf{R}(\mathbf{a})=\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathsf{P}(\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{a})\rho). \tag{15.5}$$

Последний результат показывает, что без ограничения общности можно рассматривать лишь элементы группы вида $\mathsf{P}(\rho)\mathsf{R}(\mathbf{a})$, поскольку равенство (15.5) позволяет менять порядок сомножителей.

Следуя общему определению преобразования функции [формула (3.37)], определим в пространстве функций оператор $\mathsf{T}(\rho, \mathbf{a})$:

$$\mathsf{T}(\rho, \mathbf{a})\psi(\mathbf{r})=\psi\{[\mathsf{P}(\rho)\mathsf{R}(\mathbf{a})]^{-1}\mathbf{r}\}=\psi\{\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{a})\mathsf{P}^{-1}(\rho)\mathbf{r}\}=$$
$$=\psi\{\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{a})(\mathbf{r}-\rho)\} \tag{15.6}$$

в соответствии с обозначениями гл. 14, § 9.

В. Неприводимые представления

Поскольку вращения и сдвиги не коммутируют, группа $\mathscr{E}_3$ не есть прямое произведение двух групп. Таким образом, задача перечисления неприводимых представлений не тривиальна. Но то обстоятельство, что группа $\mathscr{E}_3$ содержит абелеву подгруппу трансляций, позволяет применить для решения этой задачи метод, аналогичный тому, который применялся в гл. 14, § 9 для пространственных групп.

Оператор представления, соответствующий элементу группы $\mathsf{P}(\rho)\mathsf{R}(\mathbf{a})$, мы обозначим через $\mathsf{T}(\rho, a)$. По определению операторы $\mathsf{T}(\rho, \mathbf{a})$ должны удовлетворять тому же закону умножения, что и соответствующие элементы

группы. Таким образом, из равенства (15.5) следует, что

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) = \mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, 0)\,\mathsf{T}(0, \mathbf{a}) = \mathsf{T}(0, \mathbf{a})\,\mathsf{T}(\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{a})\boldsymbol{\rho}, 0). \quad (15.7)$$

Для построения представлений группы $\mathscr{E}_3$ нам понадобится следующее свойство вращений: произвольное вращение R может быть представлено в виде $\mathsf{R} = \mathsf{R}_{xy}\mathsf{R}_z$, где R_z — вращение вокруг оси z, а R_{xy} — вращение относительно оси, лежащей в плоскости xy. Для доказательства указанной факторизации рассмотрим вектор $\mathbf{k} = \mathsf{R}\mathbf{k}_0$, где $\mathbf{k}_0$ — вектор, направленный вдоль оси z. Определим теперь R_{xy} как (единственное) вращение относительно оси, лежащей в плоскости xy, которое переводит $\mathbf{k}_0$ в $\mathbf{k}$, т. е. $\mathsf{R}_{xy}\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$. Из этого определения получаем

$$\mathsf{R}_{xy}^{-1}\mathsf{R}\mathbf{k}_0 = \mathsf{R}_{xy}^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{k}_0.$$

Таким образом, вращение R_{xy}^{-1} оставляет вектор $\mathbf{k}_0$ на месте и, следовательно, является вращением вокруг оси z: $\mathsf{R}_{xy}^{-1}\mathsf{R} = \mathsf{R}_z$. Отсюда следует желаемый результат:

$$\mathsf{R} = \mathsf{R}_{xy}\mathsf{R}_z. \quad (15.8)$$

Теперь мы можем получить представления группы $\mathscr{E}_3$, сделав следующие шаги (см. также гл. 20, § 3).

Шаг 1. Выберем базисный вектор $|\mathbf{k}\rangle$, преобразующийся по неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(\mathbf{k})}$ подгруппы трансляций:

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, 0)\,|\mathbf{k}\rangle = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})\,|\mathbf{k}\rangle. \quad (15.9)$$

(В данной главе базисный вектор удобнее обозначать через $|\mathbf{k}\rangle$ в отличие от обозначения $\mathbf{e}_\mathbf{k}$, применявшегося в гл. 14, § 9.)

Шаг 2. Покажем, что вектор $\mathsf{T}(0, \mathbf{a})\,|\mathbf{k}\rangle$ преобразуется по представлению $\mathsf{T}^{(\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathbf{k})}$ подгруппы трансляций. Действительно, с учетом соотношений (15.7) и (15.9) получаем

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, 0)\,(\mathsf{T}(0, \mathbf{a})\,|\mathbf{k}\rangle) = \mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a})\,|\mathbf{k}\rangle = \\
&= \mathsf{T}(0, \mathbf{a})\,\mathsf{T}(\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{a})\boldsymbol{\rho}, 0)\,|\mathbf{k}\rangle = \\
&= \mathsf{T}(0, \mathbf{a})\exp[-i\mathbf{k}\cdot\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{a})\boldsymbol{\rho}]\,|\mathbf{k}\rangle = \\
&= \exp[-i\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}]\,(\mathsf{T}(0, \mathbf{a})\,|\mathbf{k}\rangle). \quad (15.10)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если базисный вектор $|\mathbf{k}\rangle$ принадлежит пространству представления E, то тому же простран-

ству принадлежат все векторы $|\mathbf{k}'\rangle$, такие, что $|\mathbf{k}'\rangle = |\mathsf{R}(\mathbf{a})\,\mathbf{k}\rangle$, т. е. все векторы $|\mathbf{k}'\rangle$ с $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$.

Шаг 3. Фиксируем теперь некоторое направление (скажем, направление вдоль оси z) и обозначим вектор, определяющий это направление, через $\mathbf{k}_0$, вектор, преобразующийся по представлению подгруппы трансляций $\mathsf{T}^{(\mathbf{k}_0)}$, через $|\mathbf{k}_0\rangle$ и вращение относительно вектора $\mathbf{k}_0$ через $\mathsf{R}(\mathbf{a}_0)$. Из формулы (15.10) следует, что вектор $\mathsf{T}(0, \mathbf{a}_0)\,|\mathbf{k}_0\rangle$ преобразуется по отношению к трансляциям как $|\mathbf{k}_0\rangle$, поскольку $\mathsf{R}(\mathbf{a}_0)\,\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0$. Таким образом, множество базисных *векторов пространства представления* E, *обозначенных* нами через $|\mathbf{k}_0\rangle$, инвариантно по отношению к вращениям вокруг оси z и, следовательно, векторы этого множества могут быть классифицированы по неприводимым представлениям группы $\mathcal{R}_2$ вращений вокруг фиксированной оси. Это значит, что можно ввести более детализированное обозначение $|\mathbf{k}_0 m\rangle$ вместо $|\mathbf{k}_0\rangle$ для базисных векторов пространства представления. Здесь индекс m нумерует представления группы $\mathcal{R}_2$ (гл. 7, § 3), т. е.

$$\mathsf{T}(0,\ \mathbf{a}_0)\,|\mathbf{k}_0 m\rangle = \exp(-i m a_0)\,|\mathbf{k}_0 m\rangle. \qquad (15.11)$$

Шаг 4. Теперь мы можем построить представление E. Оно будет определяться двумя величинами: $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|$ и m. Начав с одного базисного вектора $|\mathbf{k}_0 m\rangle$, образуем множество векторов вида

$$|\mathbf{k} m\rangle = \mathsf{T}(0,\ \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}))\,|\mathbf{k}_0 m\rangle, \qquad (15.12)$$

где $\mathbf{k}$ — произвольный вектор длиной $|\mathbf{k}|$, а $\mathsf{R}(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}))$ — однозначно определенное вращение вокруг оси $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})$, лежащей в плоскости xy, которое переводит $\mathbf{k}_0$ в $\mathbf{k}$: $\mathsf{R}(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}))\,\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$. Тильда над вектором $\tilde{\mathbf{a}}$ указывает, что этот вектор перпендикулярен вектору $\mathbf{k}_0$, т. е. лежит в плоскости xy. Таким образом, пространство представления содержит бесконечное множество базисных векторов, характеризующихся одними и теми же значениями m и длины вектора $\mathbf{k}$ и различающихся направлением этого вектора. Чтобы показать, что это множество инвариантно относительно действия группы $\mathcal{E}_3$, рассмотрим результат применения оператора

представления к произвольному базисному вектору $|\mathbf{k}m\rangle$:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a})|\mathbf{k}m\rangle &= \mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, 0)\mathsf{T}(0, \mathbf{a})\mathsf{T}(0, \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}))|\mathbf{k}_0 m\rangle = \\ &= \mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, 0)\mathsf{T}(0, \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}'))\mathsf{T}(0, \mathbf{c})|\mathbf{k}_0 m\rangle = \\ &= \mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, 0)\mathsf{T}(0, \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}'))\exp(-imc)|\mathbf{k}_0 m\rangle = \\ &= \exp(-imc)\mathsf{T}(\boldsymbol{\rho}, 0)|\mathbf{k}'m\rangle = \\ &= \exp(-imc)\exp(-i\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\rho})|\mathbf{k}'m\rangle. \qquad (15.13)\end{aligned}$$

При выводе соотношений (15.13) мы применили формулу (15.8) к вращению $\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathsf{R}(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}))$:

$$\mathsf{R}(\mathbf{a})\mathsf{R}(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})) = \mathsf{R}(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}'))\mathsf{R}_z(c). \qquad (15.14)$$

Соотношением (15.14) определяются вращения $\mathsf{R}(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}'))$ и $\mathsf{R}_z(c)$. Вектор $\mathbf{k}'$ определяется из соотношения $\mathbf{k}' = \mathsf{R}(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}'))\mathbf{k}_0$, что с учетом равенства (15.14) эквивалентно определению $\mathbf{k}' = \mathsf{R}(\mathbf{a})\mathbf{k}$. Таким образом, по данным a и $\mathbf{k}$ можно определить $\mathbf{k}'$ и c, так что выражением (15.13) фактически определяются матричные элементы представления E.

Путем таких же рассуждений, как и в гл. 7, § 4, п. Б, где шла речь о группе $\mathcal{R}_3$, можно показать, что для неприводимости представления E необходимо, чтобы пространство представления E содержало единственный базисный вектор с параметрами $\mathbf{k}_0$, m. Таким образом, неприводимые представления группы $\mathcal{E}_3$ даются формулой (15.13). При построении неприводимого представления мы использовали вектор $\mathbf{k}_0$, направленный вдоль оси z. Но, как нетрудно показать, представления, определяемые разными векторами $\mathbf{k}_0$, эквивалентны, если длина этих векторов одинакова. Следовательно, направление вектора $\mathbf{k}_0$ несущественно с точки зрения параметризации неэквивалентных неприводимых представлений группы $\mathcal{E}_3$, и мы будем пользоваться обозначением $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,\, m)}$ для неприводимого представления, определяемого векторами длиной $|\mathbf{k}|$.

В качестве примера рассмотрим представление $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,\, 0)}$. По формуле (15.12) это представление можно построить из функции $\exp(i|\mathbf{k}|z)$, зависящей от координаты одной частицы. Базисные векторы представления даются выражением $|\mathbf{k}0\rangle = \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где $\mathbf{k}$ пробегает множество векторов длиной $|\mathbf{k}|$. Чтобы получить представления $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,\, m)}$, необходимы по меньшей мере две частицы. В этом

случае в качестве базисного вектора $|\mathbf{k}_0 m\rangle$ можно взять функцию $\exp[i|\mathbf{k}|(z_1+z_2)]\{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)\}^m$.

Метод, примененный здесь для анализа неприводимых представлений группы $\mathscr{E}_3$,— это еще один пример общего метода «малой группы» (гл. 14, § 9, п. А). В нашем случае малой группой является группа $\mathscr{R}_2$, оставляющая на месте вектор $\mathbf{k}_0$, а «звезда» состоит из бесконечного множества точек. Этот же метод мы применим позже при изучении группы Пуанкаре, чем в основном и объясняется то, что мы столь подробно рассматриваем здесь группу $\mathscr{E}_3$.

В случае $\mathbf{k}_0=0$ схема, изложенная выше, неприменима, так как на четвертом шаге нашего построения мы не получим ненулевых векторов $\mathbf{k}$. Однако в этом случае пространство представления трансляционно инвариантно и неприводимые представления группы $\mathscr{E}_3$ совпадают с неприводимыми представлениями группы $\mathscr{R}_3$ (гл. 7). Мы обозначаем эти представления через $\mathsf{E}^{(0,\,j)}\equiv\mathsf{D}^{(j)}$. Таким образом, неприводимые представления группы $\mathscr{E}_3$ конечномерны лишь при $\mathbf{k}=0$.

Так как группа $\mathscr{R}_3$ является подгруппой группы $\mathscr{E}_3$, в принципе можно различать неприводимые представления группы $\mathscr{E}_3$ по индексу j, параметризующему неприводимые представления группы $\mathscr{R}_3$. Но это гораздо сложнее, нежели метод, изложенный выше, основанный на подгруппе трансляций. Отметим, что, так как вращения и сдвиги не коммутируют, невозможно одновременно использовать индексы $\mathbf{k}$ и j. В квантовой механике это эквивалентно тому, что если система обладает $\mathscr{E}_3$-инвариантностью, то в ней сохраняются импульс и угловой момент, но в силу некоммутативности соответствующих операторов эти величины не могут быть измерены одновременно. Наш выбор базиса в пространстве представления $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,\,m)}$ соответствует одновременной диагонализации импульса и проекции на него углового момента. Такой базис называют иногда спиральным.

Г. Группа $\mathscr{E}_2$

Здесь мы скажем несколько слов о двумерной евклидовой группе $\mathscr{E}_2$. Сама по себе эта группа не представляет особого интереса, но она будет использована нами ниже (§ 4) при построении неприводимых представлений группы Пуанкаре. Как и в случае группы $\mathscr{E}_3$, выберем

базисные функции, удовлетворяющие двумерному аналогу равенства (15.9). Теперь уже ни один элемент группы, кроме единичного, не оставляет двумерный вектор $\mathbf{k}$ на месте. Следовательно, неприводимые представления группы $\mathscr{E}_2$ определяются величиной $|\mathbf{k}|$ и обозначаются через $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|)}$. Исключение составляет случай $\mathbf{k}=0$, так как при этом все векторы пространства представления E трансляционно инвариантны и, следовательно, группа $\mathscr{E}_2$ эффективно сводится к группе $\mathscr{R}_2$. Таким образом, при $\mathbf{k}=0$ все неприводимые представления группы $\mathscr{E}_2$ сводятся к представлениям $\mathsf{T}^{(m)}$ группы $\mathscr{R}_2$ (гл. 7, § 3, п. А). Мы будем обозначать эти представления через $\mathsf{E}^{(0,\,m)}$, отмечая тем самым, что $\mathbf{k}=0$.

Д. Евклидова группа $\mathscr{E}_3$ в физике

Если гамильтониан физической системы инвариантен относительно полной евклидовой группы, то обычные рассуждения показывают, что собственные состояния гамильтониана можно классифицировать по неприводимым представлениям $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,\,m)}$ и $\mathsf{E}^{(0,\,j)}$. Кроме того, в системе возможно вырождение. Чтобы физическая система обладала $\mathscr{E}_3$-инвариантностью, требуется инвариантность гамильтониана по отношению не только к трансляциям, но и к вращениям. Отсюда следует, что в случае одной частицы $\mathscr{E}_3$-инвариантность может иметь место только тогда, когда частица движется свободно. В этом случае ее энергия дается выражением $\hbar^2k^2/2M$, а волновая функция равна $\exp(i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Далее, как было отмечено выше, эта функция должна соответствовать представлению $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,\,0)}$. Бесконечная размерность этого представления соответствует бесконечному множеству направлений вектора $\mathbf{k}$ с фиксированным модулем $|\mathbf{k}|$. Физический смысл этого в том, что импульс свободной частицы с фиксированной энергией может иметь любое направление.

Если рассматривать только одну классическую частицу, то другие представления, такие, как $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,\,m)}$ с $m\neq 0$ и $\mathsf{E}^{(0,\,j)}$, не возникают. Представление $\mathsf{E}^{(0,\,j)}$, например, соответствовало бы покоящейся частице с угловым моментом j. В случае же системы частиц представление $\mathsf{E}^{(0,\,j)}$ приобретает очевидный смысл: центр масс системы покоится, но ее угловой момент равен j. Такие

представления с целыми j могут появляться при описании системы двух частиц, потенциал взаимодействия которых имеет вид $V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$.

Чтобы вполне оценить значение представлений $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,m)}$ с $m\neq 0$, полезно рассмотреть инфинитезимальные операторы группы $\mathscr{E}_3$ и построить операторы Казимира (гл. 7, § 5). Шесть инфинитезимальных операторов группы $\mathscr{E}_3$ — это просто операторы P_x, P_y и P_z, соответствующие сдвигам, и операторы X_x, X_y, X_z, соответствующие вращениям. Операторы P_q коммутируют друг с другом. Перестановочные соотношения для операторов X_q даются формулами (7.25), а коммутаторы P_q с X_q таковы [закон умножения (15.5), задача 15.1]:

$$[\mathsf{P}_q,\ \mathsf{X}_q]=0,\quad [\mathsf{P}_x,\ \mathsf{X}_y]=\mathsf{P}_z,\quad [\mathsf{P}_y,\ \mathsf{X}_x]=-\mathsf{P}_z, \tag{15.15}$$

причем остальные коммутаторы получаются циклической перестановкой индексов. Оператор $\mathbf{P}^2=\mathsf{P}_x^2+\mathsf{P}_y^2+\mathsf{P}_z^2$ является, очевидно, инвариантом, т. е. оператором Казимира. Из соотношений (15.15) следует, что оператор $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}$ также коммутирует с операторами X_q и P_q и является вторым оператором Казимира. (Оператор $\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}$ не инвариантен относительно сдвигов.) В неприводимом представлении любой оператор Казимира должен быть кратным единичному. В представлении $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,m)}$ мы имеем $\mathbf{P}^2=-k^2$ и $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}=-km$. Последний результат легко получить, применяя операторы $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}$ к базисному вектору $|k_0m\rangle$ и используя формулу (15.11) при малых $\mathbf{a}_0$. Физический смысл этих двух операторов таков: первый из них определяет величину импульса, а второй — проекцию углового момента на направление движения. Если воспользоваться дифференциальными выражениями $\mathsf{P}_x=-\partial/\partial x$, ... и соотношением $\mathbf{X}=\mathbf{r}\times\mathbf{P}$ [формула (7.21)], справедливыми в случае одной частицы, то сразу же видно, что $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}=0$, т. е. $m=0$. В случае двух классических частиц $\mathsf{P}_x=\mathsf{P}_{x_1}+\mathsf{P}_{x_2}=-\partial/\partial x_1-\partial/\partial x_2$, ..., $\mathbf{X}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{P}_1+\mathbf{r}_2\times\mathbf{P}_2=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)\times(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)+\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)$. В последнем равенстве величина $\mathbf{X}$ представлена в виде суммы внутренней и внешней частей. В произведении $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}$ остается лишь внутренняя часть: $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}=\frac{1}{2}(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)$.

Таким образом, оператор Казимира $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}$ есть оператор проекции относительного углового момента двух частиц на направление движения их центра масс. В случае представления $\mathbf{E}^{(|\mathbf{k}|,m)}$ все состояния $|\mathbf{k}, m\rangle$ отвечают одному и тому же значению $|\mathbf{k}|$ абсолютной величины полного импульса пары частиц; направление же этого импульса меняется от состояния к состоянию. Проекция относительного углового момента на направление $\mathbf{k}$ для состояния $|\mathbf{k}m\rangle$ всегда равна m независимо от $\mathbf{k}$. Для того чтобы энергия системы зависела от m, гамильтониан должен содержать члены типа $\mathbf{P}\cdot\mathbf{X}$ — типа скалярного произведения полного импульса на внутренний угловой момент системы. Заметим, что величина внутреннего углового момента в отличие от его проекции на направление $\mathbf{k}$ не входит в число параметров, определяющих представление $\mathbf{E}^{(|\mathbf{k}|,m)}$. Если $\mathscr{E}_3$-инвариантная система находится в состоянии с внутренним угловым моментом l, то состояния с $m=l,\ l-1,\ \ldots,\ -l$ принадлежат разным представлениям и могут иметь разные энергии. Т. е. инвариантность внутреннего движения системы относительно вращений вокруг ее центра масс не следует из $\mathscr{E}_3$-инвариантности. (Для того чтобы понятие внутреннего углового момента можно было осмыслить с точки зрения симметрии, необходимо перейти к группе Лоренца, включающей в себя преобразования, которыми связываются системы, движущиеся относительно друг друга с постоянной скоростью.)

Мы рассматривали только одну и две классические частицы. Обобщение на случай произвольного числа частиц в принципе не представляет трудностей. Можно, конечно, ввести спин частицы s так, как это было сделано в гл. 8, § 4. Для этого нет необходимости вводить новые внутренние координаты. Спиновая степень свободы описывается $(2s+1)$-мерным пространством представления $\mathbf{D}^{(s)}$ группы внутренних вращений. В покое такая частица будет тривиально описываться представлением $\mathbf{E}^{(0,s)}$. Но в случае движущейся частицы, как и в случае относительного углового момента двух частиц, для преобразований группы $\mathscr{E}_3$ существенна лишь проекция спина на направление движения. Инфинитезимальный оператор $\mathbf{X}$ для частицы со спином s равен сумме орбитальной части $\mathbf{r}\times\mathbf{P}$ и спиновой части $\mathbf{X}_s$, которая опре-

деляется как оператор в $(2s+1)$-мерном пространстве, описывающем спин частицы (гл. 8, § 4).

E. Скалярное произведение и нормировка базисных векторов

Этот небольшой раздел можно пропустить, так как его результаты в дальнейшем использоваться не будут. Но нам кажется, что наличие континуума базисных векторов в пространствах неприводимых представлений группы $\mathscr{E}_3$ требует дополнительных комментариев. При изложении в гл. 4 общей теории, а также во всех встречавшихся нам ранее физических приложениях мы рассматривали лишь конечномерные неприводимые представления и соответствующие операторы определялись конечными матрицами. Теперь мы впервые познакомились с неприводимыми представлениями $\mathbf{E}^{(|\mathbf{k}|,m)}$, имеющими бесконечную размерность. Пространства этих представлений порождены континуумом базисных векторов $|\mathbf{k}m\rangle$, соответствующих различным направлениям вектора $\mathbf{k}$. С аналогичной ситуацией мы встретимся в § 4 при изучении группы Пуанкаре.

Рассмотрим векторы $|\psi\rangle$, принадлежащие пространству некоторого фиксированного неприводимого представления. В случае конечномерного представления мы можем написать

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i |i\rangle, \tag{15.16}$$

где $|i\rangle$ — базис в пространстве представления, а ψ_i — безразмерные величины. Мы определяем скалярное произведение векторов $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$ соотношением

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^* \psi_i, \tag{15.17}$$

из которого следует, что

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}. \tag{15.18}$$

Линейное преобразование $\mathbf{T}$ является унитарным относительно такого скалярного произведения, если $\langle\mathbf{T}\varphi|\mathbf{T}\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$ для всех $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$. Для представлений, по-

добных представлению $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,m)}$, пространство которых имеет непрерывный базис $|\mathbf{k}m\rangle$, вместо (15.16) положим

$$|\psi\rangle = \int \psi(\mathbf{k})\,|\mathbf{k}m\rangle\, d\Omega_{\mathbf{k}}, \tag{15.19}$$

где интегрирование ведется по множеству направлений вектора $\mathbf{k}$, а $\psi(\mathbf{k})$—функция, зависящая от направления вектора $\mathbf{k}$. В этом случае мы определим скалярное произведение следующим образом:

$$\langle\varphi\,|\,\psi\rangle = \int \varphi^*(\mathbf{k})\,\psi(\mathbf{k})\, d\Omega_{\mathbf{k}}. \tag{15.20}$$

Теперь мы можем убедиться в том, что представление $\mathsf{E}^{(|\mathbf{k}|,m)}$, заданное соотношением (15.13), унитарно по отношению к скалярному произведению (15.20). На основании формул (15.13) и (15.19) имеем

$$|\mathsf{T}\psi\rangle = \int \psi(\mathbf{k}) \exp(-imc - i\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\rho})\,|\mathbf{k}'m\rangle\, d\Omega_{\mathbf{k}} =$$
$$= \int \psi(\mathsf{R}^{-1}\mathbf{k}') \exp(-imc - i\mathbf{k}'\cdot\boldsymbol{\rho})\,|\mathbf{k}'m\rangle\, d\Omega_{\mathbf{k}'}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что, так как $\mathbf{k}' = \mathsf{R}(\mathbf{a})\,\mathbf{k}$ и вектор $\mathbf{a}$ фиксирован, интеграл по $d\Omega_{\mathbf{k}}$ можно заменить интегралом по $d\Omega_{\mathbf{k}'}$, т. е. якобиан перехода равен 1. Изменив обозначение переменной интегрирования, можно написать

$$|\mathsf{T}\psi\rangle = \int \psi(\mathsf{R}^{-1}\mathbf{k}) \exp(-imc - i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})\,|\mathbf{k}m\rangle\, d\Omega_{\mathbf{k}}.$$

Сравнивая это выражение с (15.19) и учитывая определение (15.20), получаем

$$\langle\mathsf{T}\varphi\,|\,\mathsf{T}\psi\rangle = \int \varphi^*(\mathsf{R}^{-1}\mathbf{k})\,\psi(\mathsf{R}^{-1}\mathbf{k})\, d\Omega_{\mathbf{k}} =$$
$$= \int \varphi^*(\mathbf{k})\,\psi(\mathbf{k})\, d\Omega_{\mathbf{k}} = \langle\varphi\,|\,\psi\rangle.$$

Аналог равенства (15.18) можно написать только с использованием δ-функции Дирака угловых переменных $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Отметим, что в определение скалярного произведения (15.20) входит интеграл не по всему импульсному пространству, так как величина $|\mathbf{k}|$ остается постоянной.