

## § 2. ГРУППА ЛОРЕНЦА $\mathcal{L}$

Показав, каким образом трансляции и вращения объединяются в рамках евклидовой группы, мы теперь на время забудем о трансляциях и займемся обобщением группы вращений  $\mathcal{R}_3$  на четырехмерное пространство-время. Мы определяем это четырехмерное пространство, ставя в соответствие каждому событию точку с четырьмя координатами  $(x, y, z, ct)$ . Здесь  $(x, y, z)$  — пространственные координаты события, а  $t$  — момент времени, связанный с этим событием;  $c$  — скорость света. Таким образом, все четыре координаты имеют размерность длины. Мы будем характеризовать точку с координатами  $(x, y, z, ct)$  вектором  $\hat{\mathbf{e}} = (x, y, z, ct)$ , соединяющим начало координат  $(0, 0, 0, 0)$  с этой точкой. Напомним, что событие, соответствующее началу координат четырехмерного пространства, — это событие в точке  $(0, 0, 0)$ , произошедшее в момент времени  $t = 0$ .

### A. Преобразования Лоренца

В случае группы вращений мы имели дело с трехмерными векторами  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  и преобразованиями  $\mathbf{r}' = \mathbf{R}(\mathbf{a})\mathbf{r}$ , сохраняющими расстояния и углы, т. е. сохраняющими скалярное произведение  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  любых двух векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . В случае группы Лоренца объектом исследования будут линейные действительные преобразования  $\hat{\mathbf{e}}' = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}$  четырехмерных векторов  $\hat{\mathbf{e}} = (x, y, z, ct)$ , сохраняющие скалярное произведение

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = -x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 + c^2t_1t_2. \quad (15.21)$$

Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца. По определению они удовлетворяют условию

$$\hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \quad (15.22)$$

при любых  $\hat{\mathbf{e}}_1$  и  $\hat{\mathbf{e}}_2$ . Для четырехмерных векторов мы примем обозначение  $\hat{\mathbf{e}}$ , чтобы отличать их от векторов в обычном пространстве, для которых сохраним обозначение  $\mathbf{e}$ . Скалярное произведение (15.21) обозначается просто как  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$ . Преобразования Лоренца нас интересуют

суют потому, что, как следует из эксперимента, физические законы инвариантны относительно этих преобразований. Общий знак в определении (15.21) несуществен, но разница в знаках пространственных и временного слагаемых в выражении (15.21) играет решающую роль. Если бы эти знаки были одинаковы, то соответствующей группой была бы группа  $\mathcal{K}_4$ , не являющаяся группой инвариантности для законов природы.

Скалярный квадрат вектора  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2$  есть мера его «длины», т. е. «интервала» между событиями, соответствующими его концам. Интервал определяется как  $(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}})^{1/2}$ . Из определения (15.21) видно, что скалярный квадрат вектора может иметь любой знак. Следовательно, интервал может быть как действительным, так и мнимым. По очевидным причинам действительный интервал называют времениподобным, а мнимый — пространственноподобным. Интервал между событиями, соответствующими векторам  $\hat{\mathbf{e}}_1$  и  $\hat{\mathbf{e}}_2$ , определяется как  $((\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2))^{1/2}$ . Из равенства (15.22) следует, что преобразования Лоренца не меняют интервала.

Обозначим через  $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z, \hat{\mathbf{e}}_t$  векторы  $(1, 0, 0, 0)$  и т. д. Тогда из определения (15.21) следует, что  $\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = -1$ , а  $\hat{\mathbf{e}}_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_t = 1$ . Введем матрицу  $\mathbf{g}$  с матричными элементами  $g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ , где  $i = x, y, z, t$ :

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы  $L_{ji}$  оператора  $\mathbf{L}$  определяются соотношением  $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_j L_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j$ , так что  $\mathbf{e}_j \cdot \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}_i = g_{jj} L_{ji}$ .

Произвольный вектор  $\hat{\mathbf{e}} = \sum_i e_i \hat{\mathbf{e}}_i$  с компонентами  $e_i$  оператор  $\mathbf{L}$  переводит в вектор  $\hat{\mathbf{e}}' = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}} = \sum_{i,j} e_i L_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j$  с компонентами  $e'_j = \sum_i e_i L_{ji}$ . Пусть в базисе  $\hat{\mathbf{e}}_i$  вектор  $\hat{\mathbf{e}}$  имеет компоненты  $e_i$ . Тогда его компоненты в базисе  $\hat{\mathbf{e}}'_i = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}_i$

таковы:

$$\bar{\varepsilon}_j = \sum_i (\mathbf{L}^{-1})_{ji} \varepsilon_i = \sum_i g_{ii} L_{ij} g_{jj} \varepsilon_i.$$

Из определяющего свойства преобразований Лоренца [формула (15.22)] следует соотношение

$$g_{ij} = \sum_{k,l} L_{ki} L_{lj} g_{kl}.$$

В матричной форме оно принимает вид

$$\mathbf{g} = \mathbf{L}^\dagger \mathbf{g} \mathbf{L}, \quad (15.23)$$

где  $\mathbf{L}^\dagger$  — транспонированная матрица  $\mathbf{L}$ . Так как  $\mathbf{g}^2 = 1$ , из (15.23) следует, что  $\mathbf{g} \mathbf{L}^\dagger \mathbf{g} = \mathbf{L}^{-1}$ . Последнее соотношение отличается от определения ортогональной матрицы (гл. 3, § 5) наличием матрицы  $\mathbf{g}$ . Нетрудно показать, что  $\mathbf{L}^{-1}$  тоже является преобразованием Лоренца и что множество преобразований Лоренца образует группу (задача 15.2).

Из-за необычной формы (15.21) скалярного произведения, приводящей к тому, что „метрика“ задается не единичной матрицей, вышеприведенные формулы отличаются от соответствующих формул гл. 3, § 7 наличием множителей  $g_{ii}$ . Если для вектора  $\hat{\mathbf{e}}$  ввести так называемые ковариантные компоненты  $e^i = g_{ii} e_i$ , то можно обойтись без множителей  $g_{ii}$  (компоненты  $e_i$  называются контравариантными). Тогда все множители  $g_{ii}$  будут включены в определение компонент  $e^i$ . Например, формула для скалярного произведения принимает вид

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = \sum_i g_{ii} e_i f_i = \sum_i e^i f_i = \sum_i e_i f^i,$$

причем в последнее выражение входят как ковариантные, так и контравариантные компоненты векторов. Мы предпочитаем не вводить дополнительных усложнений и будем всегда пользоваться контравариантными компонентами с нижними индексами, преобразующимися по приведенным выше формулам.

### Собственные и несобственные преобразования

В гл. 7, § 4 мы, основываясь на знаке определителя матрицы преобразования, разделили вращения на собственные и несобственные. Для преобразований Лоренца

также имеет место подобное разделение, но имеются уже не два, а четыре типа преобразований. Эти типы преобразований различны в том смысле, что от одного к другому нельзя перейти непрерывным образом. Из равенства (15.23) следует, что

$$(\det \mathbf{L})^2 = 1.$$

Это приводит к разделению преобразований Лоренца в соответствии со значением  $\det \mathbf{L} = \pm 1$ . Далее, если написать явное выражение для матричного элемента в формуле (15.23), стоящего на пересечении четвертой строки с четвертым столбцом, то получим  $-L_{xt}^2 - L_{yt}^2 - L_{zt}^2 + L_{tt}^2 = 1$ , так что  $L_{tt}^2 = 1 + L_{xt}^2 + L_{yt}^2 + L_{zt}^2$ .

Поскольку величины  $L_{ij}$  действительны, из последнего равенства следует, что  $L_{tt}^2 \geq 1$ . Таким образом,  $L_{tt}$  может принимать лишь значения, лежащие в двух отдельных друг от друга областях:  $L_{tt} \geq 1$  и  $L_{tt} \leq -1$ . Стало быть, имеются четыре типа преобразований Лоренца, определенных следующим образом:

1)  $\det \mathbf{L} = 1$ ,  $L_{tt} \geq 1$ ; содержит тождественное преобразование,

2)  $\det \mathbf{L} = -1$ ,  $L_{tt} \geq 1$ ; содержит пространственную инверсию  $I$ ,

3)  $\det \mathbf{L} = -1$ ,  $L_{tt} \leq -1$ ; содержит обращение времени  $I_t$ ,

4)  $\det \mathbf{L} = 1$ ,  $L_{tt} \leq -1$ ; содержит инверсию пространства-времени  $II_t$ .

Преобразования типа 1 непрерывно связаны с единицей и называются собственными. Они образуют группу, которую мы назовем группой Лоренца  $\mathcal{L}$ . Расширенные группы Лоренца получаются добавлением к преобразованиям типа 1 преобразований типа 2 или 3. Мы будем обозначать эти группы через  $\mathcal{L}_s$  и  $\mathcal{L}_t$ . Объединение всех четырех типов дает еще большую группу, которую мы обозначим через  $\mathcal{L}_{st}$ . Преобразования с  $L_{tt} \geq 1$  иногда называют ортохронными, а чтобы отличать их от преобразований, включающих сдвиги, их называют „однородными“ преобразованиями Лоренца. Мы не будем пользоваться такой терминологией. В данном пункте параграфа мы ограничимся рассмотрением группы  $\mathcal{L}$ .

### Чисто лоренцевские преобразования

Прежде чем рассматривать общее преобразование Лоренца, обратимся к двум частным случаям:

$$R(a) = \begin{bmatrix} & & & | & 0 \\ & & & | & 0 \\ R(a) & & & | & 0 \\ & & & | & 0 \\ & & & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}, \quad (15.24)$$

$$Q_z(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} b & -\operatorname{sh} b \\ 0 & 0 & -\operatorname{sh} b & \operatorname{ch} b \end{pmatrix}.$$

Первое из этих двух преобразований, записанное в блочном виде, является обычным вращением, так как из (15.23) следует, что  $R^T R = I$ , а временная компонента остается неизменной. Преобразование (15.24) оставляет на месте точки, лежащие в плоскости  $xy$ , и называется чисто лоренцевским преобразованием (или «бустом») в направлении  $z$ . Такие преобразования зависят от одного действительного параметра  $b$ , принимающего значения в области  $-\infty < b < \infty$ . Разным значениям параметра  $b$  соответствуют разные преобразования  $Q_z(b)$ . Преобразованный вектор дается в этом случае выражением  $\hat{\mathbf{e}}' = Q_z(b)\hat{\mathbf{e}} = (x, y, z\operatorname{ch} b - ct\operatorname{sh} b, ct\operatorname{ch} b - z\operatorname{sh} b)$ .

Это преобразование принимает более привычный вид, если перейти от параметра  $b$  к параметру  $\beta = \operatorname{th} b$ :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z - \beta ct}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \quad y' = y, \quad x' = x, \\ ct' &= \frac{ct - \beta z}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (15.25)$$

(Позже мы увидим, что  $\beta$  имеет смысл скорости, измеренной в единицах скорости света:  $\beta = v/c$ .) Ясно, что можно определить буст и в произвольном направлении, заданном единичным трехмерным вектором  $\mathbf{u}$ . Такие бусты мы будем обозначать через  $Q(\mathbf{b})$ , где  $\mathbf{b} = bu$ , а  $b$  — величина буста, как

и в формуле (15.24). Выражение для преобразованного вектора  $\hat{\mathbf{e}}' = \mathbf{Q}(\mathbf{b})\hat{\mathbf{e}}$  можно получить как обобщение результата для  $\mathbf{Q}_z(b)$ . Проще всего вектор  $\hat{\mathbf{e}}'$  определяется выражением для его пространственных ( $\mathbf{e}'$ ) и временной ( $ct'$ ) компонент:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}' &= \mathbf{e} + \{(ch b - 1)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) - ct \sinh b\} \mathbf{u}, \\ ct' &= ct \cosh b - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) \sinh b.\end{aligned}\quad (15.26)$$

Отсюда можно получить матричные элементы  $4 \times 4$ -матрицы  $\mathbf{Q}(\mathbf{b})$ . В частности,  $Q_{xx}(\mathbf{b}) = 1 + (ch b - 1) u_x^2$ ,  $Q_{yx}(\mathbf{b}) = - (ch b - 1) u_x u_y$ ,  $Q_{zx}(\mathbf{b}) = - u_x \sinh b$ ,  $Q_{tt}(\mathbf{b}) = ch b$ . Соотношения (15.26) аналогичны соответствующим соотношениям для вращений (гл. 7, § 4).

Так как  $\mathbf{Q}(\mathbf{b})$  и  $\mathbf{R}(\mathbf{a})$  — преобразования Лоренца, их произведение — также преобразование Лоренца при любых  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Более того, мы покажем сейчас, что любое преобразование Лоренца  $\mathbf{L}$  можно представить в виде такого произведения. Этот результат аналогичен факторизации (15.8) для группы вращений. Возьмем вектор  $\hat{\mathbf{e}}_0 = (0, 0, 0, 1)$ . Рассмотрим для произвольного  $\mathbf{L}$  вектор  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{e}}_0$ . Из (15.26) следует, что существует единственный буст  $\mathbf{Q}(\mathbf{b})$ , такой, что  $\mathbf{Q}(\mathbf{b})\hat{\mathbf{e}}_0 = \hat{\mathbf{e}}$ . Таким образом, мы имеем  $\hat{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b})\hat{\mathbf{e}} = = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b})\mathbf{L}\hat{\mathbf{e}}_0$ , т. е. оператор  $\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b})\mathbf{L}$  оставляет вектор  $\hat{\mathbf{e}}_0$  на месте и, следовательно, является вращением:  $\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{b})\mathbf{L} = \mathbf{R}(\mathbf{a})$ , так что

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}(\mathbf{b})\mathbf{R}(\mathbf{a}). \quad (15.27)$$

Преобразование  $\mathbf{L}$  удобно задавать шестью параметрами, определяющими два трехмерных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Отметим, что, в то время как параметры вращения ограничены условием  $|\mathbf{a}| \leq \pi$ , параметры буста могут быть произвольными. Последнее явствует из выражения (15.24), которое показывает, что оператор  $\mathbf{Q}_z$  подходит под определение преобразования Лоренца при любых значениях  $b$ .

## Б. Области в пространстве-времени

Прежде чем говорить о физическом смысле преобразований Лоренца, остановимся на их геометрическом смысле. Для этого достаточно ограничиться бустами  $\mathbf{Q}_z(b)$ , резуль-

тат действия которых можно изобразить на плоскости  $(z, ct)$  (рис. 15.1). При нашем определении «длины» вектора как величины  $(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}})^{1/2}$ , концы всех векторов постоянной длины лежат в  $(z, ct)$ -плоскости не на окружности, а на гиперболах —  $-z^2 + c^2t^2 = \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = A$ , где  $A$  — постоянная.

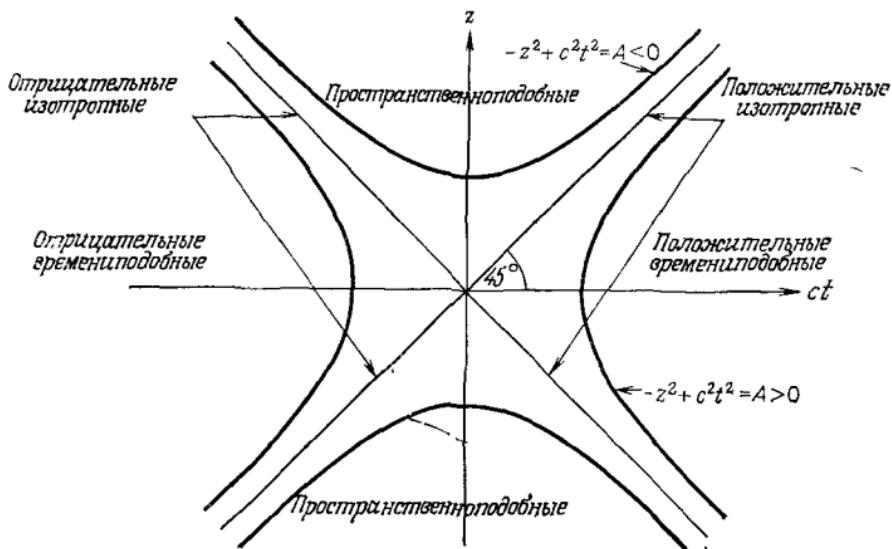


Рис. 15.1.

Поскольку величина  $A$  может иметь любой знак, а также быть равной нулю, векторы удобно разделить на следующие шесть типов:

- 1)  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} < 0$ , пространственноподобные,
- 2)  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} > 0$ ,  $t > 0$ , положительные времениподобные,
- 3)  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} > 0$ ,  $t < 0$ , отрицательные времениподобные,
- 4)  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{e}} \neq 0$ ,  $t > 0$ , положительные изотропные,
- 5)  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{e}} \neq 0$ ,  $t < 0$ , отрицательные изотропные,
- 6)  $\hat{\mathbf{e}} = 0$ , нулевой вектор.

Эта классификация приводит к разделению пространства-времени на области, изображенные на рис. 15.1. Пространственно- и времениподобные области отделены друг от друга линиями  $z = \pm ct$ , образующими множество изотропных

векторов. Заметим, что из равенства  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$  не следует, что все компоненты вектора  $\hat{\mathbf{e}}$  равны 0. Нулевыми компонентами обладает лишь нулевой вектор  $\hat{\mathbf{e}} = 0$ . Хотя на рис. 15.1 изображен случай одного пространственного измерения, наша классификация имеет место и в общем случае, так как она основана на знаке скалярного квадрата и знаке временной компоненты векторов. В общем случае пространственно- и временноподобные области разделены так называемым световым конусом — множеством точек, удовлетворяющих уравнению  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$  и образующих трехмерную «поверхность» в четырехмерном пространстве.

Так как преобразование Лоренца сохраняет «длину» вектора, оно переводит точку, соответствующую вектору  $\hat{\mathbf{e}}$ , в точку, соответствующую вектору  $\hat{\mathbf{e}}'$  с тем же значением  $A$ . Это означает, что две указанные точки лежат на одной гиперболе. (Можно говорить о семействе гипербол, соответствующих разным значениям  $A$ .) Таким образом, две пространственноподобные и две временноподобные области, а также область изотропных векторов и нулевой вектор инвариантны относительно преобразований Лоренца. Кроме того, все эти шесть областей инвариантны относительно определенных выше собственных преобразований Лоренца, которые не могут переводить положительные векторы в отрицательные и наоборот (задача 15.4). (Согласно двумерному графику на рис. 15.1, собственные преобразования Лоренца не могут переводить друг в друга векторы с противоположными знаками  $z$ -компонент. Но такое преобразование возможно в четырех измерениях за счет поворота вокруг какой-либо другой пространственной оси.) Графики, подобные представленному на рис. 15.1, часто называют «диаграммами Минковского». Наблюдатель, покоящийся по отношению к системе координат  $x, y, z$ , изображается на такой диаграмме точкой, движущейся параллельно оси  $t$ . Движение со скоростью  $v$  изображается на диаграмме Минковского траекторией, образующей с осью  $t$  угол, равный  $\arctg(v/c)$ . Начав движение из начала координат и двигаясь со скоростью, меньшей скорости света, можно достичь лишь точек в положительной временноподобной области.

## В. Физический смысл преобразований Лоренца

Физическая интерпретация преобразования  $R$  (a) проста и наглядна — это вращение. Быст же  $Q$  (b) был введен нами просто как некое математическое преобразование в пространстве-времени. Теперь мы выясним, каков физический смысл этого преобразования. Для этого достаточно рассмотреть лишь бусты вдоль оси  $z$ , заданные формулой (15.25). Поэтому мы можем пользоваться диаграммой рис. 15.1.

Рассмотрим эксперимент, связанный с событиями, происходящими в системе, покоящейся относительно некоторой системы отсчета. Точки, в которых происходят события, задаются векторами  $\hat{\mathbf{e}} = (x, y, z, ct)$ , где  $x, y, z, ct$  — координаты события в нашей системе отсчета. Предположим теперь, что мы повторили тот же эксперимент, но уже с системой, движущейся относительно системы отсчета со скоростью  $-v$  вдоль оси  $z$ . В этом случае интуиция, основанная на представлениях дарвинистской физики, подсказывает, что события второго эксперимента должны происходить в те же самые моменты времени  $t$ , а их  $z$ -координаты изменяются на величину  $-vt$ . Чем позже происходит событие, тем на большее расстояние оно сдвигается по оси  $z$  за прошедшее время  $t$ . Другими словами, события во втором эксперименте должны соответствовать векторам  $\hat{\mathbf{e}}' = (x, y, z', ct')$ , где

$$z' = z - vt, \quad t' = t. \quad (15.28)$$

Но если скорость  $v$  сравнима по величине со скоростью света  $c$ , то такой интуитивный вывод не согласуется с экспериментальными данными [1].

Суть теории относительности, подтверждаемой экспериментальными данными, — в утверждении, что в ситуации, рассмотренной выше, вектор  $\hat{\mathbf{e}}'$  получается из вектора  $\hat{\mathbf{e}}$  путем преобразования Лоренца (15.25) с  $\beta = v/c$ , а не преобразования (15.28). Заметим, однако, что при условии  $v \ll c$ , которое всегда выполняется в нашем повседневном опыте, поскольку скорость света чрезвычайно велика ( $2,998 \cdot 10^8$  м/с), преобразование Лоренца (15.25) переходит в преобразование (15.28). Поэтому нет ничего удивительного в том, что интуиция в данном случае подвела нас. Теория относительности приводит к ряду удивительных

следствий, с которыми мы познакомимся, рассмотрев три частных случая общей экспериментальной ситуации, описанной выше.

Отметим, что равным образом мы могли бы рассмотреть событие  $\hat{e}'$  как то же событие  $\hat{e}$ , описываемое наблюдателем, движущимся вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ . Две эти точки зрения — движущаяся система и движущийся наблюдатель — равно приемлемы. Мы предпочитаем первую из них (активную), следуя нашему изложению в случае группы вращений. Там мы поворачивали физическую систему, а не систему координат. В большинстве книг по теории относительности принимается другой, пассивный подход. Положив скорость системы равной  $-v$ , а не  $v$ , мы получим все формулы в общепринятом виде.

#### 1. Замедление времени и распад мезона

Рассмотрим мезон, родившийся в точке  $x = y = z = t = 0$  и распадающийся через время  $\tau$ , т. е. в точке  $\hat{e} = (0, 0, 0, \tau)$ . Это эксперимент, который состоит из двух событий, произошедших в неподвижной системе. Теперь, следуя вышеизложенной схеме, рассмотрим второй эксперимент, в котором мезон рождается в той же точке, имея скорость  $-v$ . В соответствии с теорией относительности он должен будет распасться в точке  $\hat{e}'$ , определяемой формулой (15.25):

$$\begin{aligned}x' &= y' = 0, \quad z' = -v\tau(1-\beta^2)^{-1/2}, \\t' &= \tau(1-\beta^2)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Другими словами, время жизни мезона, измеренное в той же системе отсчета, увеличивается в  $(1-\beta^2)^{-1/2}$  раз. Такое явление называется замедлением времени. Оно показывает, что время не является абсолютным, как считалось до появления теории относительности. Не будь эффекта замедления времени, мезоны, рождающиеся при столкновении элементарных частиц в верхних слоях атмосферы, распадались бы задолго до того, как они достигнут поверхности земли. Скорость этих мезонов близка к скорости света, так что множитель  $(1-\beta^2)^{-1/2}$  велик. Однако «интервал» между рождением и распадом мезона не зависит от скорости.

## 2. Сокращение расстояний

Для удобства исключим переменную  $t$  из первого уравнения (15.25):

$$z' = -\beta ct' + z(1-\beta^2)^{1/2}. \quad (15.29)$$

Теперь рассмотрим разность между координатами двух событий, происходящих в один момент времени  $t'$ :  $z'_B - z'_A = (z_B - z_A)(1-\beta^2)^{1/2}$ . С физической точки зрения одно и то же время  $t'$  означает, что мы, например, фотографируем движущуюся систему. Таким образом, если  $A$  и  $B$ —события, соответствующие концам некой линейки, то мы видим на фотографии, что движущаяся линейка сократилась в  $(1-\beta^2)^{1/2}$  раз. Подчеркнем, что при нашем активном подходе все координаты  $z'$  и времена  $t'$  измеряются в одной и той же фиксированной системе отсчета.

## 3. Относительные скорости и инвариантность скорости света

В качестве третьего примера, иллюстрирующего следствия преобразований Лоренца, рассмотрим объект, движущийся с постоянной скоростью  $-V$ , так что его траектория в пространстве-времени задается вектором  $\hat{\mathbf{e}} = (0, 0, -Vt, ct)$ . Повторим этот эксперимент, рассмотрев объект, движущийся со скоростью  $-V$  по отношению к некоторой системе отсчета, которая сама движется со скоростью  $-v$  относительно нашей фиксированной системы отсчета. Из уравнений (15.25) следует, что теперь траектория объекта дается выражениями

$$\begin{aligned} z' &= -(V+v)t(1-\beta^2)^{-1/2}, \\ ct' &= (c+vV/c)t(1-\beta^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

и, следовательно,  $z'/t' = -(V+v)/(1+vV/c^2)$ .

Это означает, что объект движется относительно исходной системы отсчета с постоянной скоростью, равной  $V' = (V+v)/(1+vV/c^2)$ . Таким образом, относительные скорости не аддитивны. Кроме того, если  $V=c$ , то и  $V'=c$ , откуда следует, что скорость света одинакова в любой системе отсчета. Этот замечательный эффект, впервые экспериментально наблюдавшийся Майкельсоном и Морли, был одним из первых экспериментальных обоснований теории относительности и является причиной того, что в преоб-

разования Лоренца входит скорость света. Если в преобразованиях Лоренца взять постоянную  $c$ , отличную от скорости света, то это приведет к противоречию с экспериментом. Из выражения для скорости  $V'$  следует, что если обе скорости  $V$  и  $v$  меньше скорости света  $c$ , то и  $V'$  меньше  $c$ . Другими словами, путем сложения относительных скоростей нельзя превысить скорость света независимо от того, насколько скорости  $V$  и  $v$  близки к  $c$ . В релятивистской динамике показывается, что для того, чтобы разогнать частицу до скорости света, требуется бесконечно большая энергия. Данные, полученные в экспериментах на мощных ускорителях элементарных частиц, полностью согласуются с этим выводом. Скорость света  $c$  действительно является верхней границей для скорости частицы, а преобразования Лоренца имеют сингулярность при  $v = c$ . Тем не менее теоретически вопрос о том, возможны ли объекты, движущиеся со скоростью  $v > c$  и существующие по другую сторону от указанной сингулярности, имеет смысл. Частицы с такими свойствами получили название «тахионов», и их свойства исследуются теоретически, но пока еще нет никаких данных, указывающих на то, что тахионы существуют (см. работу [3], цитируемую в литературе к гл. 12).

В заключение отметим, что лоренцева инвариантность законов физики означает, что они одинаковы во всех системах отсчета, движущихся с постоянной относительной скоростью. Неожиданным оказался вид преобразования, связывающего описания движения в разных системах отсчета. В том же смысле слова употребляется термин «галилеева инвариантность», но с той разницей, что разные системы отсчета связаны между собой интуитивно очевидными преобразованиями (15.28). Но галилеева инвариантность имеет место лишь при  $v \ll c$ .

## Г. Инфинитезимальные операторы

Группа Лоренца  $\mathcal{L}$  является группой Ли. Из равенства (15.27) следует, что общий элемент группы определяется шестью параметрами. К такому же выводу можно прийти, если учесть, что матричное равенство (15.23) налагает 10 условий на 16 матричных элементов  $4 \times 4$ -матрицы. Чтобы найти матрицы инфинитезимальных операторов, рассмотр-

рим формулу (15.27) при малых  $a$  и  $b$ . Взяв инфинитезимальную форму матрицы вращения  $R(a)$  из гл. 7, § 4, п. А и сохранив лишь члены первого порядка по  $b$  в формулах (15.26), получаем равенство  $L = 1 + \Lambda$ , где матрица инфинитезимального оператора  $\Lambda$  имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y & -b_x \\ a_z & 0 & -a_x & -b_y \\ -a_y & a_x & 0 & -b_z \\ -b_x & -b_y & -b_z & 0 \end{pmatrix} = \sum_{q=x, y, z} (a_q X_q + b_q Y_q). \quad (15.30)$$

Здесь  $b_q$  — три компоненты вектора буста  $b$ ,  $X_q$  — матрицы, определенные соотношениями (7.24), а  $Y_q$  — матрицы вида

$$Y_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.31)$$

Эти матрицы описывают инфинитезимальные бусты в трех пространственных направлениях.

Перестановочные соотношения для инфинитезимальных операторов можно получить, воспользовавшись формулами (15.31):

$$[X_x, X_y] = X_z, \quad [X_y, X_z] = X_x, \quad [X_z, X_x] = X_y,$$

$$[Y_x, Y_y] = -X_z, \quad [Y_y, Y_z] = -X_x, \quad [Y_z, Y_x] = -X_y,$$

$$[X_x, Y_x] = 0, \quad [X_y, Y_y] = 0, \quad [X_z, Y_z] = 0, \quad (15.32)$$

$$[X_x, Y_y] = Y_z, \quad [X_y, Y_z] = Y_x, \quad [X_z, Y_x] = Y_y,$$

$$[X_y, Y_x] = -Y_z, \quad [X_z, Y_y] = -Y_x, \quad [X_x, Y_z] = -Y_y.$$

Заметим, что линейные комбинации

$$A_q = \frac{1}{2} (X_q + iY_q), \quad B_q = \frac{1}{2} (X_q - iY_q) \quad (15.33)$$

удовлетворяют гораздо более простым перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y] &= \mathbf{A}_z, [\mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z] = \mathbf{A}_x, [\mathbf{A}_z, \mathbf{A}_x] = \mathbf{A}_y, \\ [\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y] &= \mathbf{B}_z, [\mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z] = \mathbf{B}_x, [\mathbf{B}_z, \mathbf{B}_x] = \mathbf{B}_y \end{aligned} \quad (15.34)$$

и  $[\mathbf{A}_q, \mathbf{B}_{q'}] = 0$  при любых  $q$  и  $q'$ . Другими словами, если рассматривать  $\mathbf{A}_q$  и  $\mathbf{B}_q$  как инфинитезимальные операторы, то они соответствуют прямому произведению двух групп, так как все операторы  $\mathbf{A}_q$  коммутируют с операторами  $\mathbf{B}_q$ . Кроме того, перестановочные соотношения (15.34) говорят о том, что по отдельности операторы  $\mathbf{A}_q$  и  $\mathbf{B}_q$  удовлетворяют перестановочным соотношениям (7.25) для группы  $\mathcal{R}_3$ . Таким образом,  $\mathbf{A}_q$  и  $\mathbf{B}_q$  являются инфинитезимальными операторами группы  $\mathcal{R}_3 \times \mathcal{R}_3$ . Но это отнюдь не означает, что группы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}_3 \times \mathcal{R}_3$  изоморфны, так как группе  $\mathcal{L}$  соответствуют операторы  $\mathbf{X}_q, \mathbf{Y}_q$  с действительными коэффициентами, а группе  $\mathcal{R}_3 \times \mathcal{R}_3$  — операторы  $\mathbf{A}_q$  и  $\mathbf{B}_q$  тоже с действительными коэффициентами. Тем не менее мы сможем получить неприводимые представления группы  $\mathcal{L}$  из неприводимых представлений группы  $\mathcal{R}_3 \times \mathcal{R}_3$ , поскольку при этом мы будем исходить, как и в гл. 7, § 4, лишь из алгебры инфинитезимальных операторов.

## Д. Неприводимые представления

Теперь оставим базисное четырехмерное пространство, в котором задано действие группы Лоренца, и зайдемся представлениями в более общих векторных пространствах. Но мы сохраним обозначения, принятые для инфинитезимальных операторов, и если в предыдущем пункте символами  $\mathbf{A}_q$  и  $\mathbf{B}_q$  обозначались  $4 \times 4$ -матрицы, то в дальнейшем ими будут обозначаться операторы, действующие в некотором векторном пространстве, являющемся пространством представления. Из общей теории (гл. 7, § 1) известно, что коммутаторы инфинитезимальных операторов имеют один и тот же вид во всех представлениях и, следовательно, могут быть заданы соотношениями (15.32).

Поскольку структура неприводимых представлений  $\mathbf{D}^{(j)}$  группы  $\mathcal{R}_3$  была получена в гл. 7, § 4, п. Б на основе только перестановочных соотношений, а представления прямого произведения двух групп задаются двумя индексами, каждым из которых определяется неприводимое

представление одной из этих групп, конечномерные не-приводимые представления группы Лоренца могут быть заданы парой индексов  $j$  и  $j'$ , принимающих, как и в случае группы  $\mathcal{R}_3$ , значения  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  и т. д. Размерность этих представлений, которые мы будем обозначать символом  $L^{(j,j')}$ , равна  $(2j+1)(2j'+1)$ . Можно показать, что те представления, у которых оба индекса  $j$  и  $j'$  целые числа, а также те, у которых оба индекса  $j$  и  $j'$  полуцелые, являются однозначными; представления же с одним целым и одним полуцелым индексом двузначны.

Эти два индекса можно интерпретировать, рассматривая собственные значения двух операторов Казимира (гл. 7, § 5):  $\mathbf{A}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ ,  $\mathbf{B}^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ . Учитывая формулу (7.36) и множитель  $i$ , введенный непосредственно перед формулой (7.26), получаем, что собственные значения операторов  $\mathbf{A}^2$  и  $\mathbf{B}^2$  равны  $-j(j+1)$  и  $-j'(j'+1)$ . Можно также (и в дальнейшем это будет удобнее) использовать следующие комбинации инфинитезимальных операторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^2 - \mathbf{Y}^2 &= 2(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2) \text{ с собственным значением} \\ &\quad -2\{j(j+1) + j'(j'+1)\}, \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} &= -i(\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2) \text{ с собственным значением} \quad (15.35) \\ &\quad i\{j(j+1) - j'(j'+1)\}. \end{aligned}$$

Базисные векторы пространства представления  $L^{(j,j')}$  можно обозначить через  $e_{mm'}^{jj'}$ , где, как и в случае группы  $\mathcal{R}_3$ , нижними индексами  $m=j, (j-1), \dots, -j$  и  $m'=j', (j'-1), \dots, -j'$  обозначены собственные значения операторов  $A_z$  и  $B_z$ . А именно, используя формулы из гл. 7, § 3, п. Д, получаем

$$\begin{aligned} A_z e_{mm'}^{jj'} &= -im e_{mm'}^{jj'}, \\ B_z e_{mm'}^{jj'} &= -im' e_{mm'}^{jj'}. \end{aligned} \quad (15.36)$$

Сами  $4 \times 4$ -матрицы преобразований Лоренца образуют однозначное четырехмерное представление, которое не может быть ничем иным, как представлением  $L^{(1/2, 1/2)}$ . Для того чтобы проверить это, нужно лишь по формулам

(15.31) и (7.24) вычислить матрицы

$$\mathbf{X}^2 - \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -3$$

и  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0$ , что совпадает с формулами (15.35) при  $j = j' = 1/2$ . Можно пойти и дальше и получить матрицы операторов  $\mathbf{X}_q$  и  $\mathbf{Y}_q$ , исходя из выражений для матриц инфинитезимальных операторов группы  $\mathcal{R}_3$  [формулы (7.40) и (7.39)]. Так, например, матрицы (15.31) можно путем соответствующего изменения базиса получить из матриц инфинитезимальных операторов в представлении  $D^{(1/2)}$  (задача 15.5). В частности, отметим, что  $\mathbf{X}_z = \mathbf{A}_z + \mathbf{B}_z$  и из выражений (15.36) вытекает, что базисный вектор  $e_{mm'}^{jj'}$  пространства представления  $L^{(j, j')}$  является собственным вектором оператора  $\mathbf{X}_z$  с собственным значением, равным  $-i(m+m')$ , и преобразуется по представлению  $T^{(m+m')}$  группы  $\mathcal{R}_2$  физических вращений относительно оси  $z$ .

Разложение произведения двух неприводимых представлений группы  $\mathcal{L}$  определяется соответствующим разложением для группы вращений. Результат таков:

$$L^{(j_1, j'_1)} \otimes L^{(j_2, j'_2)} = \sum_{J, J'} L^{(J, J')}, \quad (15.37)$$

где  $|j_1 - j_2| \leq J \leq (j_1 + j_2)$  и  $|j'_1 - j'_2| \leq J' \leq (j'_1 + j'_2)$ .

Физическая группа вращений  $\mathcal{R}_3$  является подгруппой группы Лоренца  $\mathcal{L}$ , и, следовательно, представление  $L^{(j, j')}$  при сужении с  $\mathcal{L}$  на  $\mathcal{R}_3$  должно разлагаться на сумму неприводимых представлений  $D^{(J)}$ . Соответствующее правило выглядит так:

$$L^{(j, j')} = \sum_{|j-j'| \leq J \leq (j+j')} D^{(J)}. \quad (15.38)$$

Формулу (15.38) можно без труда вывести в два этапа. Во-первых, из равенства (15.37) следует, что  $L^{(j, 0)} \otimes L^{(0, i')} = L^{(j, i')}$ . Но в представлении  $L^{(j, 0)}$  операторы  $B_q = 0$  и, следовательно,  $X_q = A_q$ . Таким образом, для вращений  $L^{(j, 0)} \equiv D^{(j)}$ . Точно так же, если ограничиться вращениями, то  $L^{(0, i')} \equiv D^{(i')}$ . Отсюда с учетом формулы

(7.44) получаем соотношение (15.38). Например,  $L^{(1/2, 1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}$ . Так и должно быть, поскольку сами  $4 \times 4$ -матрицы преобразований Лоренца образуют представление  $L^{(1/2, 1/2)}$ , а четырехмерное пространство распадается на трехмерное пространство, являющееся пространством представления  $D^{(1)}$  группы вращений, и время, инвариантное относительно вращений.

Отметим также, что если в случае группы  $\mathcal{R}_3$  представление, комплексно-сопряженное с представлением  $D^{(j)}$ , эквивалентно ему с заменой базиса  $e_m^* = (-1)^{j-m} e_m$  (в тех же обозначениях что и в гл. 7, § 4, п. Б; см. также § 7), то представление, комплексно-сопряженное с представлением  $L^{(j, j')}$ , эквивалентно представлению  $L^{(j', j)}$ . Таким образом, представления  $L^{(j, j')}$  эквивалентны комплексно-сопряженным представлениям лишь при  $j = j'$ . Это утверждение следует непосредственно из формулы (15.33). Однако здесь нужно проявлять осторожность и отличать оператор  $A_q$  в комплексно-сопряженном представлении — мы обозначим его через  $(A_q)^*$  — от оператора  $A_q^*$ , комплексно-сопряженного с оператором  $A_q$ . В комплексно-сопряженном представлении операторы  $X_q$  и  $Y_q$  переходят в  $X_q^*$  и  $Y_q^*$ , так что  $(A_q)^* = X_q^* + iY_q^* = (X_q - iY_q)^* = B_q^*$ . Так как представления  $D^{(j)}$  группы  $\mathcal{R}_3$  действительны, т. е. эквивалентны своим комплексно-сопряженным, последняя формула приводит к замене  $j$  на  $j'$  и наоборот.

Заметим также, что представления  $L^{(j, j')}$  не унитарны. Для унитарности необходимо, чтобы инфинитезимальные операторы были антиэрмитовыми, т. е. имели мнимые собственные значения. Но, как мы видели в гл. 7, § 4 при обсуждении группы  $\mathcal{R}_3$ , операторы  $A_q$  и  $B_q$  антиэрмитовы, и из равенств (15.33) следует, что операторы  $X_q$  антиэрмитовы, тогда как операторы  $Y_q$  эрмитовы. Таким образом, независимо от выбранного базиса наши конечномерные представления группы Лоренца не унитарны. Тривиальное представление  $L^{(0, 0)} = 1$  является, естественно, исключением.

### § 3. ГРУППА ЛОРЕНЦА С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ОТРАЖЕНИЯМИ — ГРУППА $\mathcal{L}_s$

Добавление к группе  $\mathcal{R}_3$  пространственной инверсии I было тривиальной процедурой. Инверсия коммутирует