Последнее равенство означает, что вектор, $\mathsf{T}(\mathsf{I}_t)|\hat{\mathbf{k}}\rangle$ преобразуется при трансляция по представлению $\mathsf{T}^{(\mathsf{I}_t\hat{\mathbf{k}})}$, т. е. временна́я компонента вектора $\hat{\mathbf{k}}$ меняет знак. В § 4, п. А мы видели, что с точки зрения физики четвертая компонента k_t соответствует энергии: $E=\hbar ck_t$. Следовательно, отражение времени меняет местами состояния с положительной и отрицательной энергией. По этой причине мы не будем заниматься представлениями, построенными на основе соотношения (15.93).

Тем не менее мы еще вернемся к группе $\mathcal{P}_t$ в § 7, п. Г, когда речь пойдет об операции обращения времени, которая, как показывает эксперимент, является почти универсальной операцией симметрии. Операция обращения времени с физической точки зрения эквивалентна обращению направления движения и возникает при попытке найти представление для операции I_t, свободное от трудностей, вытекающих из формулы (15.93). При выводе этой формулы мы предполагали, что $\mathsf{T}(\mathsf{I}_t)$ является линейным оператором в пространстве представления, содержащем векторы вида $|\hat{\mathbf{k}}\rangle$. Если же предположить, что $\mathsf{T}(\mathsf{I}_t)$ — «антиунитарный» оператор, то появления состояний с отрицательной энергией удается избежать. Поскольку исследование этих вопросов требует привлечения новых понятий, мы отложим его до § 7, п. Г.

Если мы хотим включить в рассмотрение как пространственную инверсию I, так и отражение времени I_t, определенное равенством $\mathsf{I}_t\hat{\mathbf{e}}=(x, y, z, -ct)$, то для того, чтобы получить группу, нам придется рассматривать также и произведение II_t, меняющее знак всех четырех компонент вектора: $\mathsf{II}_t\hat{\mathbf{e}}=-\hat{\mathbf{e}}$. Обозначим получившуюся таким образом группу через $\mathcal{P}_{st}$. Заметим, что произведение II_t коммутирует со всеми преобразованиями Лоренца и не коммутирует с трансляциями.

§ 7. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Ранее мы уже говорили о физическом смысле многих операций симметрии, входящих в группу Пуанкаре. В § 1, п. А с точки зрения физики рассматривались трехмерные трансляции, в § 1, п. Д — трансляции и вращения в трех-

мерном пространстве, образующие группу $\mathscr{E}_3$, а в § 4, п. А — четырехмерные трансляции. Теперь мы рассмотрим другие стороны этой проблемы, относящиеся к полной группе Пуанкаре.

В § 1, п. Д было показано, что группа $\mathscr{E}_3$ пригодна лишь для описания одной свободной частицы или коллективного движения системы частиц. Параметры же, определяющие представление группы, соответствуют разным свойствам описываемой системы. Так, представление $\mathsf{E}^{(|k|,\,m)}$ соответствует абсолютной величине $|\mathbf{k}|$ импульса системы и проекции m внутреннего углового момента (или спина) на направление движения. Состояния, отвечающие различным направлениям вектора $\mathbf{k}$, эквивалентны в том смысле, что они могут быть получены друг из друга посредством вращений. Инвариантами являются величины $|\mathbf{k}|$ и m. Поскольку сказанное относится к любым свободным системам, оно должно относиться и к элементарным частицам, внутреннее строение которых может быть нам совершенно неизвестно. Следовательно, мы можем характеризовать различные элементарные частицы значениями инвариантов $|\mathbf{k}|$ и m. Но, рассуждая таким образом и ограничиваясь лишь группой $\mathscr{E}_3$, мы должны считать разными частицами частицы с разными абсолютными значениями импульса $|\mathbf{k}|$ и разными проекциями внутреннего углового момента m на направление движения. Очевидно, что это неверно, но теперь видно, что такая несуразность обусловлена тем, что мы взяли в качестве группы симметрии группу $\mathscr{E}_3$, а не группу $\mathscr{P}$. Включение в рассмотрение преобразований, которыми связаны между собой системы, движущиеся относительно друг друга с постоянной скоростью, т. е. преобразований, которые вместе с группой $\mathscr{E}_3$ составляют группу $\mathscr{P}$, устраняет указанную нелогичность. Таким образом, при изучении группы Пуанкаре мы должны найти более естественные фундаментальные инварианты.

А. Масса

Неприводимые представления группы Пуанкаре характеризуются прежде всего оператором Казимира $\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}}$, который равен (§ 4, п. В) $-k^2$ для представления $\mathsf{P}^{(k,\,s)}$ и 0 для представления $\mathsf{P}^{(0,\,m)}$. В представлениях, соответ-

ствующих пространственноподобным векторам $\hat{\mathbf{k}}$, не рассматривавшихся нами подробно, оператор $\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}}$ был бы положительным. По причинам, которые будут ясны из дальнейшего, мы связываем оператор $\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}}$ с квадратом массы, а именно: «оператор квадрата массы» с учетом соответствующих размерных множителей определяется как $-\hbar^2\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}}/c^2$. Следовательно, обозначив символом M^2 величину «квадрата массы», имеем $M^2=\hbar^2k^2/c^2$ в представлении $\mathbf{P}^{(k,\,s)}$ и $M^2=0$ в представлении $\mathbf{P}^{(0,\,m)}$; для пространственноподобных векторов получается $M^2<0$. При такой интерпретации масса является мнимой для пространственноподобных $\mathbf{k}$, равна нулю для представлений типа $\mathbf{P}^{(0,\,m)}$ и принимает значение $M=\hbar k/c$ для представлений $\mathbf{P}^{(k,\,s)}$. (Отметим, что именно величина M^2, а не M имеет в данном случае смысл; точно так же в случае углового момента мы видели, что оператор Казимира $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ имеет собственное значение, равное $J(J+1)$, хотя мы используем индекс J.)

Теперь покажем, что мы правильно употребляем термин «масса». Ранее мы интерпретировали четыре компоненты оператора $\hat{\mathbf{P}}$, связав их с импульсом и энергией. Само определение $\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}}=\mathbf{P}_t^2-\sum\limits_q\mathbf{P}_q^2$ указывает на соотношение между собственными значениями компонент оператора $\hat{\mathbf{P}}$. В представлении $\mathbf{P}^{(k,\,s)}$ оно принимает вид (см. выше определение величины M^2)

$$-c^2M^2/\hbar^2=-E^2/\hbar^2c^2+\sum_q p_q^2/\hbar^2,$$

т. е. с учетом определения величин $\mathbf{p}$ и E (§ 1, п. А и § 4, п. А)

$$E^2=M^2c^4+c^2\mathbf{p}^2. \tag{15.94}$$

(Это известное соотношение между энергией и импульсом, справедливое в классической теории относительности; гл. 16, § 1. Величина M называется массой покоя.) Если импульс мал, т. е. $p\ll Mc$, то

$$E=Mc^2(1+p^2/M^2c^2)^{1/2}\approx M^2c+p^2/2M. \tag{15.95}$$

Последнее выражение дает энергию в виде суммы энергии покоя и кинетической энергии $p^2/2M={}^1/_2Mv^2$.

Различные векторы $|\hat{\mathbf{k}}sm_s\rangle$ пространства представления $\mathsf{P}^{(k,s)}$ соответствуют разным соостояниям движения частицы (или системы) с массой $M=\hbar k/c$. Не только направление импульса $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$, но и его величина могут быть любыми, а соответствующая энергия дается формулой (15.94). Таким образом, даже при $s=0$ представление $\mathsf{P}^{(k,0)}$ описывает все возможные состояния движения частицы с массой M. Вскоре мы увидим, что параметр s связан с внутренним угловым моментом, т. е. спином, системы или частицы.

Прежде чем переходить к случаю нулевой массы, рассмотрим кратко представление, отвечающее случаю $\hat{\mathbf{k}}=0$ — области 6 (§ 4, п. Б). Это представление отвечает не только нулевой массе, но и нулевым импульсу и энергии во всех состояниях, т. е. во всех системах отсчета. Объект с такими свойствами никогда не наблюдался [1]), и мы не будем останавливаться на этом случае. Заметим, однако, что точку $\hat{\mathbf{k}}=0$ следует исключить при рассмотрении представления $\mathsf{P}^{(0,m)}$.

Обратимся теперь к представлению $\mathsf{P}^{(0,m)}$, соответствующему нулевой массе. Оно выглядит не очень подходящим для описания частицы, но мы замечаем, что в этом случае энергия и импульс могут быть конечными; из формулы (15.94) следует, что они связаны соотношением

$$E=pc. \tag{15.96}$$

Таким образом, несмотря на нулевую массу, наш объект обладает некоторыми физическими свойствами, и на самом деле такие частицы хорошо известны в физике. При квантовом описании электромагнитного поля взаимодействие происходит благодаря обмену фотонами, которые должны иметь нулевую массу. Также и в процессе β-распада испускаются частицы, называемые нейтрино [2]), с нулевой массой.

В то время как для частицы с конечной массой возможно состояние с $p=0$ и $E=Mc^2$, в котором частица покоится, для частицы с нулевой массой такое состояние

---

[1]) Представление $\mathsf{P}^{(0,0)}$ соответствует вакууму.— *Прим. перев.*

[2]) При β-распаде нейтрона испускается антинейтрино.— *Прим. перев.*

невозможно. Мы не можем получить состояние с $\mathbf{p}=0$, не достигнув предельной точки $\hat{\mathbf{k}}=0$, которая характеризует уже другое представление. В этом представлении, как говорилось выше, все состояния имеют импульс и энергию, равные нулю. С точки зрения классической механики это означает, что частицы с нулевой массой движутся со скоростью света c, поскольку, как мы видели в § 2, п. В, в этом случае скорость частицы равна скорости света в любой системе отсчета и состояние покоя невозможно. [Другой довод классической механики в пользу того, что $v=c$, заключается в том, что при нулевой массе частица может иметь конечную энергию и конечный импульс лишь в предельном случае $v=c$, см. формулу (16.10).]

Б. Спин

Мы рассмотрели связь между первым оператором Казимира $\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}}$ и массой, а также между компонентами оператора $\hat{\mathbf{P}}$ и энергией и импульсом. Обратимся теперь ко второму оператору Казимира — оператору $\hat{\mathbf{W}}\cdot\hat{\mathbf{W}}$, определенному в § 4, п. В. Интерпретация оператора $\hat{\mathbf{W}}\cdot\hat{\mathbf{W}}$ оказывается неодинаковой в случаях нулевой и ненулевой массы, а потому эти случаи мы рассмотрим отдельно.

Конечная масса

Рассмотрим сначала случай конечной массы, который описывается представлением $\mathbf{P}^{(k,\,s)}$. Напомним, что величина s, которая может принимать значения 0, $^1/_2$, 1, $^3/_2$, ..., определяет собственные значения оператора $\hat{\mathbf{W}}\cdot\hat{\mathbf{W}}$, равные при данном k, согласно формуле (15.74), $-k^2s(s+1)$. С учетом формулы (15.94) эти собственные значения можно записать в виде

$$-Mc^2s(s+1)/\hbar^2. \tag{15.97}$$

Так как оператор $\hat{\mathbf{W}}\cdot\hat{\mathbf{W}}$ является оператором Казимира, все состояния, принадлежащие представлению $\mathbf{P}^{(k,\,s)}$, являются собственными для этого оператора и соответствуют одному и тому же собственному значению. Сле-

довательно, величина s, как и масса, есть некоторая внутренняя характеристика частицы, не зависящая от системы отсчета.

Мы будем называть эту внутреннюю характеристику спином. Строго говоря, спин равен $\hbar s$, так что s — это спин в единицах $\hbar$. Причина, по которой здесь употребляется слово спин (вращение вокруг собственной оси), станет ясна, если рассмотреть операторы W_q в случае покоящейся частицы, т. е. при $\hat{\mathbf{k}}=(0, 0, 0, k)$. Тогда из выражения (15.72) следует, что

$$\mathsf{W}_q = -i\,(Mc/\hbar)\,\mathsf{X}_q = -(Mc/\hbar)\,\mathsf{J}_q,\quad \mathsf{W}_t = 0 \text{ и}$$
$$\hat{\mathbf{W}}\cdot\hat{\mathbf{W}} = (M^2c^2/\hbar^2)\,(\mathsf{X}_x^2+\mathsf{X}_y^2+\mathsf{X}_z^2) = -(M^2c^2/\hbar^2)\,\mathbf{J}^2. \quad (15.98)$$

Таким образом, если частица покоится, то оператор W_q пропорционален оператору углового момента J_q. Угловой момент покоящейся классической точечной частицы равен, конечно, нулю, а поэтому для параметра s более подходящим было бы название «внутренний спин»[1]). Далее, так как оператор $\hat{\mathbf{W}}$ трансляционно-инвариантен, при действии на базисный вектор $|\hat{\mathbf{k}}sm_s\rangle$ пространства представления $\mathsf{P}^{(k,\,s)}$ он не может изменить параметра $\hat{\mathbf{k}}$. Следовательно, оператор $\hat{\mathbf{W}}$ просто изменяет величину m_s, оставляя вектор $\hat{\mathbf{k}}$ неизменным. Заметим, что базис $|\hat{\mathbf{k}}sm_s\rangle$ выбран таким образом, что векторы вида $|\hat{\mathbf{k}}_0sm_s\rangle$ являются собственными для оператора W_z:

$$\mathsf{W}_z\,|\hat{\mathbf{k}}_0sm_s\rangle = -m_sk\,|\hat{\mathbf{k}}_0sm_s\rangle. \quad (15.99)$$

Поскольку оператор $\hat{\mathbf{W}}$ есть четырехмерный вектор, любой базисный вектор $|\hat{\mathbf{k}}sm_s\rangle$ будет собственным для соответствующей компоненты преобразованного оператора $\hat{\mathbf{W}}$. В самом деле, подействуем на обе части равенства (15.99) преобразованием буста, переводящего вектор $\hat{\mathbf{k}}_0$ в $\hat{\mathbf{k}}$. С учетом формулы (15.57) получаем

$$\mathsf{T}\,(\mathsf{Q}\,[\mathbf{b}\,(\hat{\mathbf{k}})])\,\mathsf{W}_z\mathsf{T}^{-1}\,(\mathsf{Q}\,[\mathbf{b}\,(\hat{\mathbf{k}})])\,|\hat{\mathbf{k}}sm_s\rangle = -\,m_sk\,|\hat{\mathbf{k}}sm_s\rangle.$$

На основании формулы (15.26) для действия буста на четырехмерный вектор и с учетом значений величины

[1]) Термин «спин» общепринят.— *Прим. перев.*

$\mathbf{b}(\mathbf{k})$, приведенных после формулы (15.58), данное соотношение можно привести к виду

$$\{\mathbf{W}_z - (k_t + k)^{-1} k_z \mathbf{W}_t\} \,|\, \hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle = -m_s k \,|\, \hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle. \quad (15.100)$$

При выводе равенства (15.100) мы воспользовались тем, что $\hat{\mathbf{W}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = 0$ (§ 4, п. В). Это позволило нам заменить $\mathbf{W} \cdot \mathbf{P}$ оператором $\mathbf{W}_t \mathbf{P}_t$. Можно ввести и другой базис (спиральный), в котором диагональна проекция оператора $\hat{\mathbf{W}}$ на направление движения $\mathbf{k}$. Но это приводит к более сложному, чем (15.59), выражению для преобразования общего вида.

Из формулы (15.59) видно, что действие преобразования Лоренца $\mathbf{T}(0, \mathbf{L})$ на произвольный вектор носит двоякий характер, а именно имеет место суммирование по индексу m_s' и изменение вектора $\hat{\mathbf{k}}$. Соответственно этому инфинитезимальное преобразование Лоренца описывается суммой матричного оператора, действующего на индекс m_s, и дифференциального оператора, действующего на переменную $\hat{\mathbf{k}}$, но не изменяющего значения m_s. Дело обстоит так же, как в нерелятивистском случае при разбиении углового момента $\mathbf{j} = \mathbf{s} + \mathbf{l}$ на спиновую и орбитальную части (гл. 8, § 4). Однако базис $|\hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle$ не обеспечивает полного разбиения, поскольку вращение $\mathbf{R}' = \mathbf{Q}'^{-1}\mathbf{L}\mathbf{Q}$, определяющее матрицу, которая входит в формулу (15.59), зависит не только от преобразования $\mathbf{L}$, но и от вектора $\hat{\mathbf{k}}$. Тем не менее, изменив базис, можно добиться не только разбиения $\mathbf{j} = \mathbf{s} + \mathbf{l}$ для инфинитезимальных вращений, но и разбиения $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_s + \mathbf{Y}_l$ для инфинитезимальных бустов, где $\mathbf{s}$ и $\mathbf{Y}_s$ — «спиновые» матричные операторы, коммутирующие с «орбитальными» операторами $\mathbf{l}$ и $\mathbf{Y}_l$. Так как это разбиение тесно связано с уравнением Дирака, мы отложим его обсуждение до следующего параграфа (§ 8, п. Г).

Эксперимент показывает, что для электрона, протона и нейтрона спин s равен $^1/_2$, π-мезон имеет спин $s = 0$, а спин ρ-мезона равен 1. Составные системы, такие, как ядра или атомы, могут иметь намного бо́льшие значения спина, но обязательно целые или полуцелые.

Нулевая масса

Как мы видели в п. А, представления группы Пуанкаре $\mathsf{P}^{(0,\,m)}$ описывают частицы с нулевой массой. Рассуждения, проводившиеся выше в случае представлений $\mathsf{P}^{(k,\,s)}$, неверны для частиц с нулевой массой, поскольку мы начинали с покоящейся частицы, а частицы с нулевой массой всегда движутся со скоростью света. Однако из формул (15.72) и (15.76) следует, что для любого вектора $|\hat{\mathbf{k}}m\rangle$, принадлежащего пространству представления $\mathsf{P}^{(0,\,m)}$, справедливы равенства

$$-(\mathbf{X}\cdot\mathbf{P})\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = -\mathsf{W}_t\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = im\mathsf{P}_t\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = \\ = mk_t\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = m\,|\,\mathbf{k}\,|\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle. \qquad (15.101)$$

Но с физической точки зрения величина $-\mathbf{X}\cdot\mathbf{P}$ есть проекция углового момента на направление движения, умноженная на модуль импульса. Поскольку для классической точечной частицы такая величина равна нулю, мы и здесь используем слово «спин» применительно к величине m. Но не следует забывать, что понятия спина для частиц с нулевой массой и массой, отличной от нуля, существенно различаются. В случае нулевой массы нет $(2s+1)$-кратного вырождения состояний, соответствующего разным ориентациям спина. На самом деле даже состояние с противоположным спином $(-m)$ принадлежит другому представлению группы $\mathcal{P}$, а именно представлению $\mathsf{P}^{(0,\,-m)}$. Частицу с положительным m называют частицей с положительной «спиральностью» или «правосторонней» частицей (как обычно, имеется в виду вращение винта). Вопрос о спиральности и ее связи с четностью мы рассмотрим в п. В. Заметим, однако, что путем простых физических рассуждений можно показать, что право- и левосторонность имеет смысл лишь для частиц с нулевой массой. Дело в том, что спиральность, измеренная наблюдателем, движущимся быстрее частицы, противоположна той, которую измерит наблюдатель, движущийся медленнее той же частицы. Таким образом, если бы частица, имеющая конечную массу и движущаяся со скоростью $v < c$, обладала свойством право- или левосторонности, то это нарушало бы лоренц-инвариантность. Но так как частица с нулевой массой движется всегда со скоростью света, никакой наблюдатель не может дви-

гаться быстрее нее и противоречие с лоренц-инвариантностью не возникает.

Что касается известных частиц нулевой массы, то фотон может иметь оба значения спиральности $m=\pm 1$, тогда как нейтрино имеет $m=-{}^1/_2$, а антинейтрино $m={}^1/_2$. (См. также гл. 16, § 3, п. Д.)

В. Четность

Выше мы разъясняли физический смысл представлений собственной группы Пуанкаре $\mathcal{P}$, не включающей в себя инверсию пространства и отражение времени. Предположим теперь, что пространственная инверсия I также является симметрией, так что полной группой симметрии будет группа $\mathcal{P}_s$, представления которой мы построили в § 5. Как и ранее, мы рассмотрим отдельно случаи нулевой и ненулевой массы.

Конечная масса

В § 5 было показано, что если группу $\mathcal{P}$ расширить до группы $\mathcal{P}_s$, то каждому представлению $\mathsf{P}^{(k,\,s)}$ группы $\mathcal{P}$ будут соответствовать два неприводимых представления группы $\mathcal{P}_s$, обозначенные через $\mathsf{P}^{(k,\,s)\pm}$. Из формулы (15.87) следует, что действие оператора инверсии в представлении $\mathsf{P}^{(k,\,s)\pm}$ выражается, во-первых, в изменении направления вектора $\mathbf{k}$ на обратное и, во-вторых, в добавлении множителя ± 1 (соответственно знаку в индексе представления). Первое отвечает обращению направления движения, второе же относится даже к покоящейся частице. Поэтому о знаке множителя ± 1 говорят как о «внутренней четности» частицы — положительной или отрицательной. Подобно спину, внутренняя четность не зависит от того, как частица движется, и характеризует саму частицу. Можно представлять себе, что четность относится к некоторой «внутренней» структуре частицы.

На самом деле определить абсолютную внутреннюю четность частицы возможно лишь в редких случаях: например, для π^0-мезона. Обычно же в реакциях имеют место два и более превращений, и поэтому можно определить лишь относительные четности участвующих в них частиц. Кроме того, в силу законов сохранения, таких,

как закон сохранения электрического заряда, которые считаются абсолютными законами сохранения, некоторые типы переходов запрещены. Это делает невозможным определить даже относительную четность некоторых групп частиц. Абсолютная четность π^0-мезона может быть определена, например, из реакции $p+p \to p+p+\pi^0$; детальный анализ показывает, что π^0-мезон имеет отрицательную четность. Поскольку $\pi^\pm$-мезоны заряжены, невозможно придумать эксперименты по определению их абсолютной четности. Но так как $\pi^\pm$-мезон вместе с π^0-мезоном объединяются в изоспиновый триплет ($T=1$; гл. 10, § 2), естественно приписать $\pi^\pm$-мезонам отрицательную четность. Тогда относительную четность протона и нейтрона можно определить из реакций типа $p+p \to n+p+\pi^+$. Она оказывается положительной. Принято считать положительной и абсолютную четность протона и нейтрона. В проведенных выше рассуждениях существенно то, что рассматриваемые реакции относятся к сильному взаимодействию, о котором известно, что оно сохраняет четность.

Нулевая масса

Напомним (§ 5), что в случае нулевой массы неприводимые представления расширенной группы $\mathcal{P}_s$ строятся из двух представлений группы $\mathcal{P}$, а именно $\mathsf{P}^{(0,\,|m|)} = \mathsf{P}^{(0,\,m)} \oplus \mathsf{P}^{(0,\,-m)}$, и пространственная инверсия переводит векторы пространства одного неприводимого представления группы $\mathcal{P}$ в векторы пространства другого неприводимого представления этой группы. Это естественно, так как инверсия коммутирует с операторами спина и, следовательно, изменение направления вектора $\mathbf{k}$ на противоположное должно приводить к изменению знака спиральности. В случае нулевой массы мы не можем приписать частицам внутренней четности, поскольку неприводимые представления $\mathsf{P}^{(0,\,|m|)}$ группы $\mathcal{P}_s$ не несут индексов типа «$\pm$». Физический смысл этого в том, что нельзя говорить о внутренней четности покоящейся частицы, коль скоро частицы с нулевой массой всегда движутся со скоростью света.

Эксперимент показывает наличие в природе фотонов в обоих состояниях $m=\pm 1$. Это означает, что фотон

описывается представлением $\mathsf{P}^{(0,\,1)} \oplus \mathsf{P}^{(0,\,-1)}$ группы $\mathcal{P}_s$ или, другими словами, группой симметрии для фотона является группа $\mathcal{P}_s$. В то же время нейтрино, которое всегда находится в состоянии с $m = -1/2$, описывается группой $\mathcal{P}$, не включающей инверсию. Таким образом, если в электромагнитных процессах, идущих за счет обмена фотонами, четность сохраняется, то в процессах с участием нейтрино, таких, как β-распад, экспериментально наблюдается несохранение четности. Антинейтрино со спиральностью $m = 1/2$ также существуют, но их следует рассматривать как частицы, отличные от нейтрино, поскольку они появляются в других реакциях (гл. 16, § 3, п. Ж).

Г. Обращение времени

Если запустить кинофильм задом наперед, то все движения будут протекать в обратном порядке. Вместо падающего камня мы увидим камень, подброшенный вверх. Такое обращенное движение тоже согласуется с физическими законами. Это означает, что камень, подброшенный вверх, будет вести себя в вакууме точно так же, как падающий камень в кинофильме, идущем задом наперед. Дело в том, что уравнения Ньютона в однородном гравитационном поле инвариантны относительно замены времени t на $-t$. Но в квантовой механике, основанной на уравнении Шредингера, простое отражение времени $t \to -t$ приводит, как мы видели в § 6, еще и к изменению знака энергии, поскольку оператор энергии равен $i\hbar\partial/\partial t$. Таким образом, в квантовой механике отражение времени приводит к бо́льшим изменениям, нежели простое обращение направления движения. Поскольку представление об обращении направления движения выглядит совершенно естественно в классической механике, соответствующая операция должна быть возможной и в квантовой механике. Такая операция должна изменять на обратное направление движения, не меняя знака энергии. Ниже мы построим такую операцию; она называется «обращением времени» и обозначается символом Υ. Оказывается, что Υ — весьма необычный, нелинейный оператор. Поэтому мы сейчас сделаем небольшое отступление, чтобы объяснить смысл

и значение таких операторов. (Коротко об операторе обращения времени упоминалось в гл. 5, § 10 и в гл. 9, § 8.)

Во всех примерах симметрии в квантовой механике, с которыми мы встречались в этой книге, соответствующие преобразования волновых функций были линейными и унитарными. Рассмотрев подробнее причины такого выбора, мы убедимся, что он не является единственно возможным. Пусть $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$—два вектора состояния системы. Один из постулатов квантовой механики гласит, что если система находится в состоянии $|\psi\rangle$, то вероятность обнаружить ее при измерении в состоянии $|\varphi\rangle$ равна квадрату модуля скалярного произведения векторов состояния: $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$. Если обозначить через $|\psi'\rangle=\mathsf{T}|\psi\rangle$ и $|\varphi'\rangle=\mathsf{T}|\varphi\rangle$ состояния, полученные путем преобразования симметрии T, то, поскольку результат измерения должен остаться неизменным, мы имеем

$$|\langle\mathsf{T}\varphi|\mathsf{T}\psi\rangle|^2=|\langle\varphi|\psi\rangle|^2. \tag{15.102}$$

Это равенство должно выполняться, если преобразованная в результате операции T система имеет те же, что и ранее, физические свойства. Ясно, что равенство (15.102) выполняется, если оператор T унитарен, т. е. $\langle\mathsf{T}\varphi|\mathsf{T}\psi\rangle=\langle\varphi|\psi\rangle$ для всех векторов $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$. Но благодаря тому, что в (15.102) входит квадрат модуля скалярного произведения, имеется и другая возможность. Исходя из соотношения (15.102), можно показать, что с точностью до тривиальных фазовых множителей оператор T может быть либо линейным и унитарным, как мы и предполагали до сих пор, т. е.

$$\begin{gathered}\langle\mathsf{T}\varphi|\mathsf{T}\psi\rangle=\langle\varphi|\psi\rangle,\\ \mathsf{T}(a|\varphi\rangle+b|\psi\rangle)=a\mathsf{T}|\varphi\rangle+b\mathsf{T}|\psi\rangle,\end{gathered} \tag{15.103}$$

либо антилинейным и антиунитарным, т. е. удовлетворять условиям

$$\begin{gathered}\langle\mathsf{T}\varphi|\mathsf{T}\psi\rangle=\langle\psi|\varphi\rangle=\langle\varphi|\psi\rangle^*,\\ \mathsf{T}(a|\varphi\rangle+b|\psi\rangle)=a^*\mathsf{T}|\varphi\rangle+b^*\mathsf{T}|\psi\rangle.\end{gathered} \tag{15.104}$$

В случае непрерывных групп мы естественным образом приходим к выбору (15.103), поскольку считаем, что единичный оператор соответствует единице группы, а единичный оператор линеен и унитарен. Рассматривая операцию отражения времени в § 6, мы тоже принимали

обычное условие (15.103). Выбрав же теперь вторую возможность, соответствующую условиям (15.104), мы получим преобразование обращения времени, не затрагивающее знака энергии.

Рассмотрим представления группы $\mathcal{P}_t$, образованной добавлением к группе $\mathcal{P}$ операции отражения времени I_t, в которых элементу I_t ставится в соответствие антилинейный оператор Υ. Таким образом, сохраняя уравнение (15.92) для группового умножения и заменяя оператор $\mathsf{T}(\mathsf{I}_t)$ антилинейным оператором Υ, получаем вместо формулы (15.93) следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}(\hat{\varepsilon})\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}\rangle &= \Upsilon\mathsf{T}(\mathsf{I}_t\hat{\varepsilon})|\hat{\mathbf{k}}\rangle = \Upsilon\exp(i\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathsf{I}_t\hat{\varepsilon})|\hat{\mathbf{k}}\rangle = \\ &= \exp(-i\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathsf{I}_t\hat{\varepsilon})\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}\rangle = \exp(-i\mathsf{I}_t\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\varepsilon})\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}\rangle = \\ &= \exp(i\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\varepsilon})\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}\rangle. \qquad (15.105)\end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь вторым равенством (15.104) и элементарным соотношением $\mathsf{I}_t\hat{\mathbf{k}} = -\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}}$, где I — пространственная инверсия. Итак, при трансляциях вектор $\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}\rangle$ преобразуется по представлению $\mathsf{T}^{(\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}})}$ и трудности, связанные с отрицательными энергиями, не возникают. Оператор Υ обладает также и желаемым свойством изменять направление движения на противоположное. Хотя обращение времени и похоже на пространственную инверсию, мы не можем ввести физически сколько-нибудь осмысленное понятие «четности по отношению к обращению времени». Это непосредственно связано с антилинейной природой оператора Υ. Действительно, пусть $|\psi\rangle$ — собственный вектор оператора Υ, соответствующий собственному значению λ, так что $\Upsilon|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$. Из антилинейности оператора Υ следует, что для любой фазы η справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\Upsilon\exp(i\eta)|\psi\rangle &= \exp(-i\eta)\Upsilon|\psi\rangle = \exp(-i\eta)\lambda|\psi\rangle = \\ &= [\exp(-2i\eta)\lambda]\exp(i\eta)|\psi\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, вектор $\exp(i\eta)|\psi\rangle$, который должен быть физически неотличимым от вектора $|\psi\rangle$, соответствует собственному значению $\exp(-2i\eta)\lambda$ оператора Υ, и, следовательно, величина λ может иметь физический смысл лишь с точностью до фазы. В частности, несуществен знак величины λ. Все сказанное в равной мере приме-

нимо как к случаю нулевой, так и к случаю ненулевой массы. Однако для того, чтобы дальше изучать представления группы $\mathcal{P}_t$, нам необходимо рассмотреть два этих случая по отдельности. Мы обнаружим, что в обоих случаях добавление к группе $\mathcal{P}$ нового элемента I_t не приводит к необходимости увеличения размерности пространства неприводимого представления. Чтобы идти далее, нам необходим закон умножения для преобразований Лоренца и отражения времени

$$\mathsf{I}_t \mathsf{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathsf{L}(\mathbf{a}, -\mathbf{b})\, \mathsf{I}_t, \tag{15.106}$$

который следует из матричной записи соответствующих преобразований в четырехмерном пространстве. Как обычно, мы предполагаем, что операторы представления подчиняются тому же закону. Иначе говоря, оператор обращения времени коммутирует с вращениями и меняет направления бустов на обратные. Из определения физической операции обращения времени следует, что операция Υ^2 воспроизводит исходную физическую систему. Следовательно, $\Upsilon^2 |\psi\rangle = \exp(i\alpha) |\psi\rangle$, где α — некоторая фаза. Вместе с условием антилинейности (15.104) это приводит к следующему ограничению (задача 15.10): $\Upsilon^2 |\psi\rangle = \pm |\psi\rangle$. В случае однозначного представления мы должны были бы выбрать знак «+», так как соответствующий элемент группы удовлетворяет соотношению $\mathsf{I}_t^2 = \mathsf{E}$. Но если мы допускаем наличие двузначных представлений, подобных представлениям группы $\mathcal{R}_3$ с полуцелыми j, то приемлем также и знак «—».

Конечная масса

При изучении поведения базисных векторов $|\hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle$ пространства представления $\mathsf{P}^{(k,\, s)}$ группы $\mathcal{P}$ под действием нового преобразования Υ мы будем придерживаться метода, изложенного в § 5. Рассмотрим сначала векторы специального вида $|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ с $\hat{\mathbf{k}}_0 = (0, 0, 0, 1)$. Из формулы (15.105) следует, что вектор $\Upsilon |\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ отвечает тому же значению $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}_0$. Можно было бы думать, что, так как оператор Υ коммутирует с вращениями, вектор $\Upsilon |\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ должен характеризоваться тем же значением величины m_s. Но нужно учесть антилинейность оператора Υ. Поскольку

собственные значения оператора X_z являются мнимыми, т. е. $\mathsf{X}_z|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = -i m_s|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ (см., например, гл. 7, § 3, п. Д), получаем

$$\mathsf{X}_z \Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = \Upsilon \mathsf{X}_z|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = \\ = \Upsilon(-i m_s)|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = i m_s \Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle.$$

Отсюда следует, что при вращениях относительно оси z вектор $\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ преобразуется как вектор, характеризующийся значением $-m_s$, хотя, как нетрудно видеть, величина s остается неизменной. Фактически для произвольного вращения имеем

$$\mathsf{T}(\mathsf{R}(\mathbf{a}))\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = \Upsilon \mathsf{T}(\mathsf{R}(\mathbf{a}))|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = \\ = \sum_{m_s'} \Upsilon D^{(s)}_{m_s' m_s}(\mathbf{a})|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s'\rangle = \\ = \sum_{m_s'} D^{(s)*}_{m_s' m_s}(\mathbf{a})\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s'\rangle. \qquad (15.107)$$

Таким образом, множество векторов $\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ с фиксированными $\hat{\mathbf{k}}_0$ и s преобразуется при вращениях по представлению, комплексно-сопряженному представлению $\mathsf{D}^{(s)}$ группы $\mathcal{R}_3$. Но представление $\mathsf{D}^{(s)}$ эквивалентно своему комплексно-сопряженному (гл. 7, § 7), и с учетом обычных соглашений выполняется равенство $D^{(s)*}_{m_s' m_s}(\mathbf{a}) = (-1)^{m_s - m_s'} D^{(s)}_{-m_s' -m_s}(\mathbf{a})$. Следовательно, набор векторов $\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ преобразуется при вращениях так же, как и набор векторов $(-1)^{m_s}|\hat{\mathbf{k}}_0 s - m_s\rangle$. Соответственно этому имеются две возможности: либо векторы $\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ линейно-независимы от векторов $|\hat{\mathbf{k}}_0 s - m_s\rangle$, либо справедливо равенство $\Upsilon|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = \gamma(-1)^{m_s}|\hat{\mathbf{k}}_0 s - m_s\rangle$, где γ — некоторая постоянная. Так как нас интересуют неприводимые представления группы $\mathcal{P}_t$, первую возможность следует отбросить. Дело в том, что представления такого типа, построенные исходя из вектора $|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$, приводимы. Доказательство этого аналогично соответствующему доказательству из § 3. Обратимся ко второй возможности. Принято выбирать множитель $\gamma = (-1)^s$, так что множитель $-1)^{s+m_s}$ действителен и при полуцелых значениях s.

Заметив, что набор $(2s+1)$ векторов $|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$ с фиксированными $\hat{\mathbf{k}}_0$ и s инвариантен по отношению к вращениям и обращению времени, образуем остальные базисные векторы пространства представления группы $\mathcal{P}_t$, используя формулу (15.57), определяющую действие буста на векторы вида $|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle$. Для произвольного базисного вектора пространства представления имеем

$$\begin{aligned}\Upsilon|\hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle &= \Upsilon \mathsf{T}(\mathsf{Q}[\mathbf{b}(\hat{\mathbf{k}})])|\hat{\mathbf{k}}_0 s m_s\rangle = \\ &= \mathsf{T}(\mathsf{Q}[-\mathbf{b}(\hat{\mathbf{k}})])(-1)^{s+m_s}|\hat{\mathbf{k}}_0 s - m_s\rangle = \\ &= (-1)^{s+m_s}|\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}} s - m_s\rangle. \end{aligned} \tag{15.108}$$

Это равенство показывает, что операция Υ изменяет на противоположные направления импульса и спина частицы. Кроме того, из него следует, что

$$\begin{aligned}\Upsilon^2|\hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle &= (-1)^{s+m_s}(-1)^{s-m_s}|\hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle = \\ &= (-1)^{2s}|\hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle. \end{aligned} \tag{15.109}$$

Таким образом, $\Upsilon^2 = 1$ для представлений с целым спином и $\Upsilon^2 = -1$ для представлений с полуцелым спином. Это справедливо независимо от выбора множителя γ. Пользуясь формулой (15.108), мы можем непосредственно определить результат действия оператора Υ на произвольный вектор $|\psi\rangle$, заданный выражением (15.78). Преобразованный вектор $|\psi'\rangle = \Upsilon|\psi\rangle$ определяется коэффициентами $\psi'_{m_s}(\hat{\mathbf{k}}) = (-1)^{s-m_s}\psi^*_{-m_s}(-\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}})$. Оператор обращения времени можно представить в виде произведения унитарного оператора на оператор K, осуществляющий комплексное сопряжение c-чисел — коэффициентов разложения по некоторому базису; однако явный вид такого представления для оператора Υ будет, очевидно, зависеть от выбора базиса. Заметив [формула (20.40)], что спиновое вращение $\mathsf{R}^s_y(-\pi)$ переводит m_s в $-m_s$ и вводит добавочный множитель $(-1)^{s+m_s}$, и определив оператор $\mathsf{T}_k(\mathsf{I})$ как оператор, переводящий базисный вектор пространства представления, отвечающий четырехмерному вектору $\hat{\mathbf{k}}$, в вектор, отвечающий четырехмерному вектору $\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}}$, мы видим, что в базисе $|\hat{\mathbf{k}} s m_s\rangle$ выполняется равенство $\Upsilon = \mathsf{K}\mathsf{R}^s_y(-\pi)\mathsf{T}_k(\mathsf{I})$. Однако в координатном представлении операция обращения времени задается формулой $\Upsilon =$

$= \mathsf{K}\mathsf{R}_y^s(-\pi)\,\mathsf{T}(\mathsf{I}_t)$, где оператор $\mathsf{T}(\mathsf{I}_t)$ меняет t на $-t$. Если $s = 1/2$, то $\mathsf{R}_y^s(-\pi) \equiv 2is_y$.

Нулевая масса

Из закона умножения (15.106) следует, что $\Upsilon\mathbf{X} = \mathbf{X}\Upsilon$ и $\Upsilon\mathbf{Y} = -\mathbf{Y}\Upsilon$, а из формулы (15.92)—что $\Upsilon\mathbf{P} = \mathbf{P}\Upsilon$ и $\Upsilon\mathbf{P}_t = -\mathbf{P}_t\Upsilon$. Таким образом, $\Upsilon\mathbf{W} = -\mathbf{W}\Upsilon$ и $\Upsilon\mathbf{W}_t = \mathbf{W}_t\Upsilon$. Рассмотрим теперь базисный вектор, принадлежащий пространству представления $\mathsf{P}^{(0,\,m)}$ группы $\mathcal{P}$, которое соответствует частице с нулевой массой. Исходя из формулы (15.76), получаем равенство $\Upsilon(\hat{\mathbf{W}} + im\hat{\mathbf{P}})\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = 0$, так что из вышеприведенных соотношений и антилинейности оператора Υ следуют равенства

$$(-\mathbf{W} - im\mathbf{P})\,\Upsilon\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = 0,$$

$$(\mathbf{W}_t + im\mathbf{P}_t)\,\Upsilon\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = 0,$$

или, другими словами,

$$(\hat{\mathbf{W}} + im\hat{\mathbf{P}})\,\Upsilon\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = 0. \qquad (15.110)$$

Итак, мы приходим к заключению, что вектор $\hat{\Upsilon}\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle$ тоже принадлежит пространству представления $\mathsf{P}^{(0,\,m)}$ группы $\mathcal{P}$. Из формулы же (15.105) следует, что этот вектор преобразуется по отношению к действию группы $\mathcal{P}$ как вектор $|\,\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}}m\rangle$. Как и ранее, можно показать, что предположение о линейной независимости векторов $\Upsilon\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle$ и и $|\,\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}}m\rangle$ приводит к построению приводимого представления группы $\mathcal{P}_t$. Следовательно, в случае неприводимого представления должно выполняться равенство

$$\Upsilon\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle = |\,\mathsf{I}\hat{\mathbf{k}}m\rangle. \qquad (15.111)$$

(Мы выбрали фазовый множитель равным $+1$.) Заметим, что независимо от выбора фазового множителя в этом случае $\Upsilon^2 = +1$. Как и ранее, смысл формулы (15.111) состоит в том, что операция обращения времени меняет направления импульса и спина на обратные. Но так как m—это проекция спина на направление движения, величина m остается неизменной. С точки зрения представлений мы заключаем, что пространство представления $\mathsf{P}^{(0,\,m)}$ остается инвариантным при добавлении к группе $\mathcal{P}$ операции Υ и, следовательно, является пространством неприводимого представления группы $\mathcal{P}_t$.

Д. Некоторые следствия симметрии по отношению к обращению времени

1. Теорема Крамера

В качестве первого примера использования симметрии по отношению к обращению времени мы выведем теорему Крамера, сформулированную впервые в 1930 г. Эта теорема гласит, что в системе, состоящей из нечетного числа частиц с полуцелым спином и ненулевой массой, любое состояние двукратно вырождено, если эта система описывается гамильтонианом, инвариантным относительно обращения времени. Для n-частичных состояний $|\psi\rangle$ оператор обращения времени определяется как произведение n одночастичных операторов. Рассмотрим теперь оператор Υ^2. Для каждой частицы он дает множитель $(-1)^{2s}$ независимо от того, как эта частица движется. Таким образом, если $|\psi\rangle$—состояние, описывающее n частиц с полуцелым спином, то $\Upsilon^2|\psi\rangle=(-1)^n|\psi\rangle=-|\psi\rangle$ при нечетном n. Если $|\psi\rangle$ является собственным вектором Υ-инвариантного гамильтониана, то вектор $|\varphi\rangle=\Upsilon|\psi\rangle$ также является собственным. Но нетрудно видеть, что вектор $|\varphi\rangle$ независим от вектора $|\psi\rangle$ и даже ортогонален ему, так как из первого равенства формулы (15.104) следует, что $\langle\psi|\varphi\rangle=\langle\psi|\Upsilon\psi\rangle=\langle\Upsilon^2\psi|\Upsilon\psi\rangle=-\langle\psi|\Upsilon\psi\rangle=-\langle\psi|\varphi\rangle$. Таким образом, $\langle\psi|\varphi\rangle=0$ и, следовательно, векторы $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$ независимы. Последнее и означает двукратное вырождение. Добавление к пространственной симметрии операции Υ не всегда приводит к дополнительному вырождению. Например, в сферически-симметричной системе отмеченное выше вырождение соответствует вырождению между состояниями с проекцией орбитального момента на ось z, равной $\pm m$, и, следовательно, является частью хорошо известного $(2j+1)$-кратного вырождения в сферически-симметричной системе.

2. Реакции

Применительно к процессам столкновений операция обращения времени означает смену ролей сталкивающихся и разлетающихся частиц. Поэтому предположение об инвариантности относительно обращения времени приводит

к соотношениям между вероятностями прямых и обратных процессов, известным как «принцип детального равновесия». Для процессов взаимодействия, исследуемых в рамках теории возмущений, можно также получить соотношения между матричными элементами, соответствующими одному и тому же процессу. Для иллюстрации рассмотрим разделение операторов $\mathbf{Q}$ на четные и нечетные по отношению к обращению времени в соответствии со знаком «+» или «—» в уравнении $\Upsilon\mathbf{Q} = \pm\mathbf{Q}\Upsilon$. Например, из предыдущего анализа следует, что операторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{P}$ — четные, а оператор $\mathbf{Y}$ — нечетный. Учитывая множитель i, возникающий при переходе от этих инфинитезимальных операторов к эрмитовым операторам импульса и углового момента, мы видим, что операторы $\mathbf{j}\cdot\mathbf{s}$ и $\mathbf{p}$ нечетные, как мы и ожидали, а операторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}\cdot\mathbf{l}$, например, четные. (Напомним, однако, что волновые функции нельзя классифицировать по четности относительно обращения времени.) Для матричных элементов имеем выражение

$$\langle\varphi|\mathbf{Q}|\psi\rangle = \langle\Upsilon\varphi|\Upsilon\mathbf{Q}\Upsilon^{-1}|\Upsilon\psi\rangle^* = \pm\langle\Upsilon\varphi|\mathbf{Q}|\Upsilon\psi\rangle^*, \quad (15.112)$$

в котором плюс относится к четным, а минус — к нечетным операторам. Производя измерения, связывающие значения матричных элементов между некоторыми состояниями и другими состояниями, полученными из первых действием операции обращения времени, можно решить вопрос о том, является ли оператор $\mathbf{Q}$ четным, нечетным или имеет смешанный тип по отношению к обращению времени.

В качестве примера рассмотрим электрический дипольный момент покоящейся частицы с полуцелым спином и ненулевой массой. Дипольный момент определяется по изменению энергии, пропорциональному внешнему электрическому полю $\mathbf{E}$, т. е. соответствующий член в гамильтониане взаимодействия имеет вид $\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$, где $\mathbf{D}$ — оператор дипольного момента. В квантовой механике оператор $\mathbf{D}$ является вектором. В случае частицы со спином s нас будут интересовать матричные элементы вида $\langle m_s|\mathbf{D}_z|m_s\rangle$, если в качестве оси z мы выберем направление поля $\mathbf{E}$. Поскольку $\mathbf{D}$ — векторный оператор, по теореме Вигнера—Эккарта [формула (7.54)] имеем

$$\langle m_s|\mathbf{D}_z|m_s\rangle = (-1)^{s+m_s}\langle -m_s|\mathbf{D}_z|-m_s\rangle. \quad (15.113)$$

Но из (15.108) следует, что $\Upsilon|m_s\rangle=(-1)^{s+m_s}|-m_s\rangle$, так что в зависимости от того, является ли оператор D_z четным или нечетным по отношению к обращению времени, имеем $\langle m_s|\mathsf{D}_z|m_s\rangle=\pm\langle -m_s|\mathsf{D}_z|-m_s\rangle^*=\pm\langle -m_s|\mathsf{D}_z|-m_s\rangle$, поскольку оператор D_z должен быть эрмитовым для того, чтобы изменение энергии в электрическом поле было действительным. Сравнивая это выражение с выражением (15.113), мы видим, что дипольный момент не равен нулю только в том случае, если D_z — нечетный оператор. Согласно принятой в настоящее время теории электромагнитных взаимодействий, инвариантной относительно обращения времени, D_z — четный оператор. Это согласуется с тем фактом, что ни у одной частицы дипольный момент не обнаружен. В настоящее время проводятся очень точные измерения, имеющие целью выяснить наличие хотя бы весьма малого дипольного момента у нейтрона. Наличие такого дипольного момента указывало бы на нарушение симметрии относительно обращения времени. Это также указывало бы на несохранение четности, поскольку, согласно принятой в настоящее время теории, в которой четность сохраняется, оператор D_z имеет отрицательную четность относительно пространственной инверсии. Поэтому для частицы, имеющей определенную четность, диагональный матричный элемент оператора D_z должен быть равен нулю.

Несмотря на многочисленные эксперименты, определенных указаний на нарушение симметрии относительно обращения времени найдено не было[1]). Эта ситуация резко отличается от ситуации с пространственной инверсией. Левосторонность нейтрино приводит к тому, что в слабых взаимодействиях, таких, как β-распад, симметрия относительно пространственной инверсии сильно нарушается.

Группа $\mathscr{P}_{st}$

Поскольку переход от группы $\mathscr{P}$ к группе $\mathscr{P}_t$ не вызывает никаких изменений в пространствах неприводимых представлений, переход от группы $\mathscr{P}_t$ к группе $\mathscr{P}_{st}$, со-

---

[1]) Такое нарушение симметрии обнаружено в реакции распада K-мезонов. — *Прим. ред.*

держащей как отражение времени, так и пространственную инверсию, ничем не отличается от проделанного в § 5 перехода от группы $\mathcal{P}$ к группе $\mathcal{P}_s$. Другими словами, мы просто можем объединить формулы § 5 с теми, которые получены в этом параграфе для оператора Υ. Вид преобразований, соответствующих новому элементу $\Upsilon\mathsf{T}(\mathsf{I})$, следует из формул преобразований для операторов Υ и $\mathsf{T}(\mathsf{I})$.

§ 8. ОДНОЧАСТИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

На протяжении всей главы мы изучали неприводимые представления группы Пуанкаре. Это позволило нам установить трансформационные свойства функций, принадлежащих пространствам каждого из этих представлений. Постулат пуанкаре-инвариантности законов природы позволил нам интерпретировать параметры, задающие неприводимые представления группы Пуанкаре, как инвариантные свойства частиц — массу, спин. Анализ свойств элементарных частиц позволил нам связать с каждой частицей неприводимое представление группы Пуанкаре, подобно тому как в нерелятивистской теории каждое решение стационарного уравнения Шредингера мы связывали с некоторым представлением группы симметрии гамильтониана. Однако мы никогда не занимались построением волновых функций в явном виде. Мы придерживались везде той точки зрения, которая была принята при анализе группы $\mathcal{R}_3$, а именно, что свойства базисных векторов пространства представления $\mathsf{D}^{(j)}$ можно установить, не рассматривая конкретных выражений для этих векторов. При таком подходе результаты оказываются столь общими, что их можно применять к любой сферически-симметричной системе. Например, функции вида $|jm\rangle$ имеют одинаковые свойства по отношению к вращениям независимо от того, относятся они к одной или к нескольким частицам. Но в случае одной частицы можно найти явный вид зависимости волновой функции от углов. Для этого надо воспользоваться дифференциальной формой инфинитезимальных операторов вращений. Тогда оператор Казимира будет дифференциальным оператором. Решения уравнения на собственные значения для этого