то после замены $\hat{\mathbf{p}} \equiv -i\hat{\mathbf{k}}$ уравнения (15.149) и (15.150) становятся матричными уравнениями для коэффициентов a, b и c. Выбрав для определенности вектор $\mathbf{k}$, направленный вдоль оси z, так что $k_z = k_t$, мы увидим, что структура решения $|\psi\rangle$ определяется вектором

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку этот вектор ортогонален направлению движения $\mathbf{k}$, решение называют «поперечным». Это, конечно, общее свойство, следующее непосредственно из уравнения (15.150). Как и следовало ожидать в случае $m = 1$, наше решение описывает состояние с положительной спиральностью, т. е. со спином 1, направленным в направлении движения частицы.

Чтобы перейти к спиральности $m = -1$, достаточно лишь простой замены знака. В природе фотоны (частицы, ответственные за электромагнитное взаимодействие) имеют нулевую массу и спиральность $m = \pm 1$. Следовательно, их движение описывается уравнениями Максвелла, приведенными выше (см. также гл. 16, § 3, п. Ж).

ЛИТЕРАТУРА

Подробное изложение специальной теории относительности и ссылки на оригинальные работы можно найти в книге:

1. *Muirhead H.*, The Special Theory of Relativity, Macmillan, London, 1973.

Строгая теория групп Лоренца и Пуанкаре весьма сложна; для дальнейшего чтения мы рекомендуем книгу Бернера в литературе к гл. 4 и статью Т. Ньютона в книге:

2. *Kahan T.*, Theory of Groups in Classical and Quantum Physics, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965,

а также имеющиеся там ссылки. Оригинальные работы Вигнера включены в книгу:

3. *Dyson F. J.*, Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics, Benjamin, New York, 1966.

Изложение применений группы Пуанкаре, включающее подробное обсуждение фазовых множителей, дано в книге:

4. *Halpern F. R.*, Special Relativity and Quantum Mechanics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1968.

Волновые уравнения обсуждаются в книге:

5. *Omnes R.*, Introduction to Particle Physics, Wiley-Interscience, London, 1969.

Удобная сводка результатов, касающихся групп Лоренца, Пуанкаре и их представлений, дана в книге:

6. *Lomont J. S.*, Applications of Finite Groups, Academic Press, New York, 1959.

Описание представлений группы Лоренца можно найти в книгах[1]):

7. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращения и группы Лоренца.—М.: Физматгиз, 1958.

8. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца.—М.: Физматгиз, 1958.

ЗАДАЧИ

15.1. Записав операторы сдвига и вращения в виде $\mathsf{P}(\rho)=1+\xi\mathsf{P}_x+\eta\mathsf{P}_y+\zeta\mathsf{P}_z$ и $\mathsf{R}(\mathbf{a})=1+\sum_q a_q\mathsf{X}_q$ при малых значениях параметров ρ и $\mathbf{a}$, с учетом формул (15.5) и (7.22) выведите перестановочные соотношения (15.15). (Нужно удерживать лишь члены первого порядка по $\mathbf{a}$ и ρ.)

15.2. Исходя из определения (15.23) матриц преобразований Лоренца, покажите, что последние образуют группу.

15.3. Исходя из формулы (15.26), покажите, что матричный элемент Q_{yt} буста равен $-u_y\,\mathrm{sh}\,b$.

15.4. Покажите, что если $ct>z$, то не существует собственного преобразования Лоренца, [переводящего точку $(0, 0, z, ct)$ в точку $(0, 0, z, -ct)$.

15.5. Выпишите матрицы A_z и B_z в представлении $\mathsf{L}^{(1/2,1/2)}$, используя базис $\mathbf{e}^{1/2,1/2}_{mm'}$. Выведите выражения для матриц X_z и Y_z и покажите, что при подходящем выборе базиса они согласуются с формулой (15.30).

15.6. Покажите, что если оператор трансляции $\mathsf{P}(\hat{\varepsilon})$ [формула (15.48)] выразить через компоненты ε_i вектора $\hat{\varepsilon}$ относительно нового базиса $\hat{\mathbf{e}}'_i=\mathsf{L}\hat{\mathbf{e}}_i$, то соответствующие инфинитезимальные операторы $\bar{\mathsf{P}}_i$ будут связаны с исходными операторами P_i обычным соотношением $\bar{\mathsf{P}}_i=\sum_j(\mathsf{L}^{-1})_{ij}\mathsf{P}_j$, т. е. операторы P_i преобразуются как компоненты четырехмерного вектора. [Воспользуйтесь формулой (15.23) и выражением для величин ε_i, приведенным перед ней.]

15.7. Исходя из формулы (15.53) для бесконечно малых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\hat{\varepsilon}$, формулы (15.48), а также выражения (15.30) для матрицы $\Lambda=\mathsf{L}-1$, выведите перестановочные соотношения (15.69).

15.8. На основании перестановочных соотношений (15.32) и (15.69) покажите правильность равенства (15.72).

15.9. На том основании, что компоненты P_i четырехмерного вектора $\hat{\mathbf{P}}$ удовлетворяют соотношению $\mathsf{T}(\mathsf{L})\mathsf{P}_i\mathsf{T}^{-1}(\mathsf{L})=\sum_j(\mathsf{L}^{-1})_{ij}\mathsf{P}_j$ и

---

[1]) Добавлено при переводе.—*Прим. ред.*

такому же соотношению удовлетворяют компоненты четырехмерного вектора $\hat{\mathbf{W}}$, выведите, что из уравнения (15.76) следует уравнение $(\hat{\mathbf{W}}+im\hat{\mathbf{P}})\,|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle=0$, где $|\,\hat{\mathbf{k}}m\rangle=\mathsf{T}(\mathsf{L})\,|\,\hat{\mathbf{k}}_0m\rangle$.

15.10. Исходя из соотношения $\Upsilon^2\,|\,\psi\rangle=\exp(i\alpha)\,|\,\psi\rangle$, покажите, что $\exp(i\alpha)=\pm1$. (Рассмотрите действие оператора Υ^2 на состояние $|\,\psi\rangle+|\,\varphi\rangle$, где $|\,\varphi\rangle=\Upsilon\,|\,\psi\rangle$, и учтите антиунитарность оператора Υ.)

15.11. Покажите, что в матричной записи оператор $2\mathbf{s}\times\mathbf{l}$ имеет вид $\begin{pmatrix} l_z & l_- \\ l_+ & -l_z \end{pmatrix}$ и что поэтому собственные векторы $|\,jm\rangle$ уравнения (15.116) имеют вид, указанный в тексте.

15.12. Исходя из выражений (15.33), покажите, что в представлении $\mathsf{L}^{(1/2,\,0)}$ справедливо равенство $\mathbf{X}=i\mathbf{Y}=-i\mathbf{s}$ и, таким образом, из выражения (15.72) следует, что $\mathbf{W}_t^2={}^1/_4\mathbf{P}^2$, $\mathbf{W}^2={}^1/_2\mathbf{P}^2+{}^3/_4\mathbf{P}_t^2$, так что $(\hat{\mathbf{W}}\cdot\hat{\mathbf{W}})={}^3/_4\,(\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}})$.

15.13. Покажите, что матрица γ_t, даваемая формулой (15.129), коммутирует с матрицами $\mathbf{X}_q$ и поэтому преобразуется как временна́я компонента вектора в представлении $\mathsf{L}^{(1/2,\,1/2)}$. С помощью соотношений (15.69) выведите из γ_t остальные три компоненты γ_q.

15.14. Исходя из 4×4-матриц оператора $\mathbf{Y}$ в базисе представления $\mathsf{L}^{(1/2,\,0)}\oplus\mathsf{L}^{(0,\,1/2)}$, покажите, что конечный буст $\mathsf{Q}(\mathbf{b})=\exp(\mathbf{b}\cdot\mathbf{Y})$ имеет вид $\mathrm{ch}\,{}^1/_2b+2b^{-1}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{Y})\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2b$. На этом основании выведите решения (15.135) из решений (15.134), взяв для этого значение величины $\mathbf{b}(\hat{k})$, приведенное после формулы (15.58).

15.15. Покажите, что $\gamma_t\gamma_q\gamma_t^{-1}=-\gamma_q$ и, следовательно, оператор $\mathsf{T}(\mathbf{l})$, выражение для которого дано перед формулой (15.141), коммутирует с оператором $(\hat{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{P}})$.