
ЧАСТИЦЫ, ПОЛЯ И АНТИЧАСТИЦЫ

В предыдущей главе мы ввели понятия импульса, энергии, массы и спина, исходя лишь из свойств представлений группы Пуанкаре. Мы работали в алгебраическом формализме векторов состояния, принятом в квантовой механике, и связывали элементарные частицы с неприводимыми представлениями этой группы. Определяя эти понятия, мы не пользовались каким-либо фундаментальным уравнением, подобным уравнению Шредингера, которое было главным при обсуждении симметрии в первых двенадцати главах. Более того, в гл. 15, § 8 нам удалось вывести волновые уравнения из заранее заданных трансформационных свойств. Но все это относится лишь к свободным частицам, а при переходе к взаимодействующим частицам требуется еще какая-то динамическая основа. Такой основой, по-видимому, достаточно универсальной, могут служить лагранжева теория и эквивалентная ей гамильтонова теория, покоящиеся на принципе Гамильтона. В своей простейшей форме принцип Гамильтона применим лишь к движению частиц в нерелятивистской механике. Но он естественным образом обобщается и на релятивистскую классическую механику частиц. При описании же электромагнитных явлений его обобщение должно включать также понятие взаимодействия с полем и поведение самого поля. И наконец, при обобщении этого принципа на квантовую механику, где понятия частиц и полей объединяются, необходимо вводить «античастицы». Это приводит нас к тому разделу квантовой теории поля, где осталось много нерешенных проблем. Поэтому данная глава в большей мере, чем предыдущие, носит характер неокончательности.

§ 1. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦ

А. Лагранжева теория

Движение частиц в классической механике подчиняется принципу наименьшего действия, т. е. принципу Гамильтона. Согласно этому принципу, для любой механической системы можно определить функцию Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, которая зависит от координат q_i , их производных \dot{q}_i по времени и от самого времени. Движение системы определяется теми функциями $q_i(t)$, для которых интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (16.1)$$

минимален при любых временах t_1 и t_2 . В этом состоит вариационный принцип. В точке мнимума (или по крайней мере экстремума) изменение величины S при малых изменениях формы любой из функций $q_i(t)$ должно быть равно нулю. Мы запишем это условие так: $\delta S = 0$. Методами вариационного исчисления из условия $\delta S = 0$ можно вывести уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (16.2)$$

При заданной форме лагранжиана L это — система дифференциальных уравнений для координат $q_i(t)$ как функций времени. Уравнений столько же, сколько координат, и, задав начальные условия, можно найти единственное решение для $q_i(t)$. Следовательно, движение системы полностью определяется лагранжианом. Одна система отличается от другой формой лагранжиана L как функции переменных q_i , \dot{q}_i и t .

Б. Гамильтонова теория

Лагранжева теория имеет дело с координатами и скоростями. Но иногда удобнее работать с координатами и импульсами, особенно когда речь идет о симметрии или о связи между классической и квантовой механиками. И существует другая теория, гамильтонова (полностью эквивалентная лагранжевой), в которой используются

импульсы, а не координаты. Сначала введем обобщенные импульсы p_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (16.3)$$

На основании уравнения Лагранжа (16.2) дифференциал dL можно записать в виде

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Но

$$d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i;$$

таким образом, разность

$$d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (16.4)$$

не содержит дифференциалов $d\dot{q}_i$ скоростей. Значит, величина $\sum_i p_i \dot{q}_i - L$ не содержит скоростей в явном виде; мы назовем ее гамильтонианом и обозначим через H :

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (16.5)$$

Из уравнения (16.4) получаем

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \quad (16.6)$$

Это — уравнения Гамильтона. Если уравнения Лагранжа содержат вторые производные по времени от координат q_i (поскольку величина $\partial L / \partial \ddot{q}_i$, вообще говоря, зависит от скоростей \dot{q}_i), то в уравнения Гамильтона входят лишь первые производные по времени от переменных p_i и q_i . Но теперь число уравнений удвоилось. Естественно, оба метода дают одно и то же решение.

С точки зрения симметрии легко заметить, что если лагранжиан L (или гамильтониан H) не зависит от некоторой координаты q_i , то соответствующий обобщенный импульс p_i постоянен, поскольку из уравнений (16.2)

или (16.6) мы получаем $\dot{p}_i = 0$. Отметим также, что из уравнения (16.4) следует равенство

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \dot{p}_i - \sum_i \dot{p}_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (16.7)$$

Таким образом, если лагранжиан L (или гамильтониан H) не зависит от времени (явно), то гамильтониан H постоянен. Эта постоянная, связанная с однородностью времени, может быть отождествлена с энергией системы подобно тому, как однородность пространства, $\partial L / \partial q_i = 0$, приводит к постоянству импульса p_i .

При описании колебаний молекул в гл. 6, § 2 мы уже встречались с простым примером использования уравнений Лагранжа.

B. Примеры из релятивистской механики

Рассмотрим сначала свободную частицу с массой M . Мы требуем, чтобы действие S было инвариантным относительно преобразований из группы Пуанкаре, что совпадает с требованием независимости движения от положения, ориентации и скорости равномерного движения всей системы в пространстве. Поскольку интеграл (16.1) может рассматриваться для любых интервалов, должно быть инвариантным само подынтегральное выражение. В обозначениях гл. 15, § 2 координаты частиц записывались так:

$$\hat{\mathbf{e}} = (x, y, z, ct),$$

$$d\hat{\mathbf{e}} = (dx, dy, dz, cdt) = (v_x, v_y, v_z, c) dt,$$

$$\text{т. е. } |d\hat{\mathbf{e}}| = (d\hat{\mathbf{e}} \cdot d\hat{\mathbf{e}})^{1/2} = (c^2 - v^2)^{1/2} dt,$$

где v — скорость. По построению величина $|d\hat{\mathbf{e}}|$ инвариантна, и, следовательно, по крайней мере с точки зрения инвариантности выражение $(c^2 - v^2)^{1/2}$ подходит для роли лагранжиана L . Величина $|d\hat{\mathbf{e}}|$ — это интервал между соседними точками $\hat{\mathbf{e}}$ и $\hat{\mathbf{e}} + d\hat{\mathbf{e}}$ на траектории частицы в четырехмерном пространстве. Она подобна расстоянию $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ вдоль кривой в двумерном пространстве. В самом деле, мы видим, что выбор

$$L = -Mc(c^2 - v^2)^{1/2} \quad (16.8)$$

приводит к обычным уравнениям движения частицы массы M . При таком подходе массу следовало бы определить как постоянную M , входящую в выражение (16.8) для лагранжиана L . Пользуясь уравнением Лагранжа (16.2) и отсутствием зависимости лагранжиана L от переменных x, y, z , получаем постоянные импульсы $\partial L / \partial \dot{x}$ и т. д.:

$$p_x = Mv_x(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \text{const} \text{ и т. д.}, \quad (16.9)$$

а для энергии

$$\begin{aligned} E = H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L &= Mv^2(1 - v^2/c^2)^{-1/2} + Mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2} = \\ &= Mc^2(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = Mc^2(1 + p^2/M^2c^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Из равенств (16.9) и (16.10) можно вывести обычное соотношение между энергией и импульсом

$$E^2 - p^2c^2 = M^2c^4,$$

такое же, как и в квантовом случае [формула (15.94)]. При малых v/c выражение (16.10) сводится к известному выражению

$$E = Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2, \quad (16.11)$$

содержащему энергию покоя Mc^2 и кинетическую энергию.

В качестве второго простого примера возьмем электромагнитное поле, которое задается векторным потенциалом $\hat{\mathbf{A}} = (A_x, A_y, A_z, \varphi)$. Для описания движения в этом поле частицы с зарядом e мы должны таким образом изменить лагранжиан (16.8), чтобы он содержал $\hat{\mathbf{A}}$, но оставался инвариантным. Самый простой инвариант — скалярное произведение

$$\hat{\mathbf{A}} \cdot d\hat{\mathbf{e}} = (-\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e\varphi) dt.$$

Обычные уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле получаются путем включения именно такого члена с подходящей постоянной $-e/c$, так что

$$L = -Mc(c^2 - v^2)^{1/2} + (e/c)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - e\varphi. \quad (16.12)$$

Теперь обобщенные импульсы имеют следующий вид:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = Mv_x(1 - v^2/c^2)^{-1/2} + (e/c)A_x, \quad (16.13)$$

а гамильтониан таков:

$$\begin{aligned} H &= Mc^2(1-v^2/c^2)^{-1/2} + e\varphi = \\ &= Mc^2\{1+(p-e\mathbf{A}/c)^2/M^2c^2\}^{1/2} + e\varphi. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Уравнение Лагранжа (16.2) для лагранжиана (16.12) после некоторых алгебраических преобразований переходит в обычное уравнение движения заряда в поле. В нерелятивистском пределе $v \ll c$ мы получаем уравнение

$$m\ddot{\mathbf{v}} = - (e/c) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - e \operatorname{grad} \varphi + (e/c) \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (16.15)$$

которое обычно записывается в виде

$$m\ddot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + (e/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (16.16)$$

где

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}/c - \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (16.17)$$

Векторы **E** и **B** называются напряженностями электрического и магнитного полей. Величина, стоящая в правой части уравнения (16.16), имеет размерность силы (в левой части стоит произведение массы на ускорение) и называется силой Лоренца.

Дифференциальный оператор $\square = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial ct} \right)$ есть четырехмерный вектор (гл. 15, § 4); следовательно, шестнадцать величин $\square_i A_j$ преобразуются по представлению $\mathbf{L}^{(1/2, 1/2)} \otimes \mathbf{L}^{(1/2, 1/2)}$, равному произведению представлений группы Лоренца. Так как векторы **E** и **B** являются первыми производными компонент векторного потенциала $\hat{\mathbf{A}}$, они содержат эти шестнадцать величин, и на основании разложения (15.37) произведения представлений можно отождествить сумму $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$ с представлением $\mathbf{L}^{(1, 0)}$, а разность $\mathbf{E} - i\mathbf{B}$ — с представлением $\mathbf{L}^{(0, 1)}$ (задача 16.1).

Электромагнитное поле проявляется лишь во влиянии, оказываемом на движение заряженной частицы в соответствии с уравнением (16.16). Значит, любые два поля $\hat{\mathbf{A}}$ с одинаковыми напряженностями **E** и **B** с физической точки зрения идентичны. Из уравнений (16.17) мы видим, что векторный потенциал $\hat{\mathbf{A}}$ определяется неоднозначно. Так, если $f(\mathbf{r}, t)$ — любая скалярная функция, то вектор-

ный потенциал $\hat{\mathbf{A}}' = (\mathbf{A}', \varphi')$, где

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

описывает ту же физическую ситуацию, что и $\hat{\mathbf{A}}$. Выбор функции f называется выбором калибровки.

§ 2. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ПОЛЕЙ

Понятие поля вводится для описания взаимодействия на расстоянии. Так, если заряд e помещен в начало координат, а другой заряд e свободно движется, то можно сказать, что первый заряд создает силовое поле с напряженностью e^2/r^2 , направленное от начала координат, а второй заряд движется в этом поле. В данном случае мы имеем статическое поле, но, вообще говоря, поле, может зависеть также от времени. Кроме того, поле силе подобное рассмотренному выше, имеет в каждой точке направление. Правда, в данном примере направление всегда задается просто вектором \mathbf{r} , но можно представить себе и более общие ситуации. Поле сил в нашем примере, как хорошо известно, можно характеризовать полем потенциальной энергии $V(r) = e^2/r$, и тогда сила \mathbf{F} определяется по величине и по направлению соотношением $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V(r)$. Заметим также, что поле $V(r)$ не имеет направления и представляет собой пример скалярного поля, тогда как \mathbf{F} — это пример векторного поля. Малые перемещения \mathbf{q} , которые мы рассматривали при изучении колебаний молекул в гл. 6, — другой пример векторного поля; правда, такое поле не является функцией непрерывной переменной \mathbf{r} , вектор смещения зависит лишь от дискретного множества равновесных положений колеблющихся атомов. Ниже мы дадим более точное определение понятий скалярного, векторного и более общих полей.

A. Преобразования полей

Если при вращении R поле $\varphi(\mathbf{r}, t)$ преобразуется как $\varphi'(\mathbf{r}, t) = \varphi(R^{-1}\mathbf{r}, t)$, то поле φ называется скалярным по отношению к вращениям. Если же поле имеет $2s+1$ компонент $\varphi_m(\mathbf{r}, t)$, где $m=s, s-1, \dots, -s$ и m -я компо-