

чаются уравнения поля, более общие, нежели уравнения (16.23). Они содержат члены, возникающие из-за присутствия в выражении (16.12) потенциала \hat{A} . Эти члены представляют собой плотность заряда и плотность тока заряженных частиц. Таким образом, движение частиц в соответствии с уравнением (16.16) и поведение самого поля оказываются связанными.

§ 3. КВАНТОВАННЫЕ ПОЛЯ

Классическое понятие поля было введено для описания взаимодействия между частицами. Например, если одна заряженная частица создает поле и это поле действует на другую заряженную частицу, то мы имеем взаимодействие между двумя частицами. Хорошо известно, что движение частиц на малых расстояниях должно описываться квантовой механикой и в соответствии с принципом неопределенности неизбежна некоторая неточность описания. Поэтому при исследовании движения частицы в поле возникает несоответствие между квантовомеханическим описанием частицы и чисто классическим описанием поля. Значит, мы должны ввести квантовое описание поля. Для этого заменяют поле оператором поля и рассматривают матричные элементы последнего, как это обычно делается в квантовой механике. Оператор поля представляет собой линейную комбинацию так называемых оператора рождения и оператора уничтожения квантов поля. Следовательно, в дополнение к частицам, взаимодействующим с помощью поля, мы вводим новые частицы — кванты поля. Например, фотон — это квант электромагнитного поля, а π -мезон есть основной квант поля ядерных сильных взаимодействий. Введение операторов рождения и уничтожения частиц — это не просто математический прием. Такие процессы рождения и уничтожения обычны как для безмассовых фотонов при излучении света, так и для массивных частиц, подобных π -мезону, при высокoenергетических столкновениях протонов $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$. Рождение массивной частицы не противоречит инвариантности системы относительно преобразований Пуанкаре (задача 16.4). В общей теории сами взаимодействующие частицы тоже должны рассматриваться как некие поля.

Поэтому в указанном примере должен иметься механизм, допускающий рождение большего числа протонов и π -мезонов, и такие процессы экспериментально наблюдаются.

A. Вторичное квантование

Рассмотрим теперь алгебраический аппарат, необходимый для описания процессов рождения и уничтожения частиц. Мы уже отмечали в гл. 8, § 6, п. Б, что волновые функции совокупности тождественных частиц либо полностью симметричны, либо полностью антисимметричны по отношению к перестановкам частиц. Установлено, что волновые функции частиц с целым спином (называемых бозонами) симметричны, а частиц с полуцелым спином (называемых фермионами) — антисимметричны. О такой закономерности говорилось также в гл. 5, § 9, и мы объясним эту связь между значением спина и симметрией, т. е. статистикой, в п. Г. В силу полной симметричности или антисимметричности волновых функций, а также в силу симметрии всех физических операторов нумерация частиц не имеет физического значения и служит лишь для выявления этой полезной симметрии. Поэтому неудивительно, что можно построить теорию, в которой номера частиц вовсе не фигурируют, а симметрия обеспечивается определенными правилами умножения операторов рождения и уничтожения частицы.

Для простоты и для определенности рассмотрим случай бозонов со спином, равным нулю. Изменения, необходимые в случае фермионов, мы отметим в конце. На случай частиц с ненулевым спином все обобщается непосредственно. Полное множество одиночастичных состояний для частиц заданной массы $M = \hbar k/c$ обозначим векторами $|\hat{\mathbf{k}}\rangle$, где длина k четырехмерного вектора $\hat{\mathbf{k}}$ фиксирована. Симметричное состояние n частиц можно обозначить вектором состояния $|\hat{\mathbf{k}}_1, \hat{\mathbf{k}}_2, \dots, \hat{\mathbf{k}}_n\rangle$, где множество n аргументов $\hat{\mathbf{k}}_i$ описывает n состояний, занимаемых частицами (аргументы не обязаны быть все различными). Состояние, в котором нет частиц, называют вакуумом и обозначают вектором $|0\rangle$. Он нормирован: $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. (Обозначение вакуума $|0\rangle$ не следует путать с вектором $|\hat{\mathbf{k}}\rangle$ одиночастичного состояния; согласно сказанному в гл. 15, § 7, п. А,

равенство $\hat{k} = 0$ невозможно для частицы.) В рассматриваемом нами векторном пространстве (называемом пространством Фока) целое неотрицательное число n не фиксировано и может принимать любые значения. Поэтому мы должны рассматривать число частиц как оператор N , который в общем случае не обязан быть диагональным, причем число n — это собственное значение оператора N в состоянии с n частицами. Для того чтобы работать с таким большим векторным пространством, мы должны ввести операторы, связывающие подпространства с различными числами n . Простейший такой оператор, обозначаемый символом $a^\dagger(\hat{k})$, обладает следующим свойством:

$$a^\dagger(\hat{k})|0\rangle = |\hat{k}\rangle. \quad (16.25)$$

Он называется оператором рождения частицы в состоянии $|\hat{k}\rangle$. На более общем состоянии с n частицами он определяется равенством

$$a^\dagger(\hat{k})|\hat{k}_1\hat{k}_2\dots\hat{k}_n\rangle = C|\hat{k}\hat{k}_1\hat{k}_2\dots\hat{k}_n\rangle. \quad (16.26)$$

Значение нормировочного множителя C для нас несущественно. В силу симметрии волновой функции из равенства (16.26) следует, что

$$[a^\dagger(\hat{k}), a^\dagger(\hat{k}')]=0. \quad (16.27)$$

Оператор $a(\hat{k})$, эрмитово-сопряженный оператору $a^\dagger(\hat{k})$, должен уменьшать число частиц на единицу. Он называется оператором уничтожения. При действии на вакуум он дает нуль: $a(\hat{k})|0\rangle=0$. Переходя в уравнении (16.27) к сопряженным операторам, получаем

$$[a(\hat{k}), a(\hat{k}')]=0. \quad (16.28)$$

Как нетрудно убедиться, коммутатор операторов рождения и уничтожения удовлетворяет соотношению

$$\langle 0 | [a(\hat{k}), a^\dagger(\hat{k}')]|0\rangle = \langle 0 | a(\hat{k})a^\dagger(\hat{k}')|0\rangle = \langle \hat{k} | \hat{k}' \rangle,$$

т. е. в вакуумном состоянии мы имеем

$$[a(\hat{k}), a^\dagger(\hat{k}')]=\langle \hat{k} | \hat{k}' \rangle. \quad (16.29)$$

На основании равенства (16.26) можно показать, что это перестановочное соотношение справедливо вообще, а не

только в частном случае вакуумного состояния. При выборе нормировки (15.81) это соотношение принимает вид

$$[\mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}), \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}')] = k_t \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (16.29a)$$

Теперь физические операторы можно выразить через операторы рождения и уничтожения. Например, оператор, не меняющий числа частиц, должен содержать одинаковое число сомножителей из операторов \mathbf{a} и операторов \mathbf{a}^\dagger . В частности, оператор числа частиц дается выражением (задача 16.5)

$$N = \int \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) k_t^{-1} d\mathbf{k}. \quad (16.30)$$

Как и в гл. 15, § 4, п. Г, область интегрирования охватывает все векторы $\hat{\mathbf{k}}$ фиксированной длины (массы), компонента k_t которых положительна, т. е. $k_t = (k^2 + |\mathbf{k}|^2)^{1/2}$.

В силу симметрии преобразования Пуанкаре не должны изменять число частиц. Значит, если считать вакуум единственным, то он должен быть инвариантным. Поэтому оператор рождения $\mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})$ должен преобразовываться как одночастичное состояние, т. е. в соответствии с равенством (15.59). Это легко доказать на основании равенства (16.26). В рассматриваемом здесь случае нулевого спина

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) = \exp(i\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{k}}). \quad (16.31)$$

На случай фермионов, когда вместо симметричных волновых функций должны рассматриваться антисимметричные, результаты этого пункта переносятся путем простой замены коммутатора $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ антикоммутатором $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]_+ = \mathbf{AB} + \mathbf{BA}$. В необходимости такой замены можно убедиться при переходе от равенства (16.26) к равенству (16.27).

Б. Операторы полей

Найдем линейную комбинацию операторов $\mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})$, которой соответствует рождение частицы не в состоянии $|\hat{\mathbf{k}}\rangle$, а в точке $\hat{\mathbf{e}}$ пространства-времени. Этот новый оператор мы обозначим символом $\varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}})$ и будем называть оператором поля. По определению преобразованный оператор

должен быть оператором в преобразованной точке $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}$, т. е. мы потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) \varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}) \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) = \varphi^\dagger(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}}). \quad (16.32)$$

На основании свойства (16.31) легко убедиться в том, что необходимая линейная комбинация операторов $a^\dagger(\hat{\mathbf{k}})$ имеет вид

$$\varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}) = \int \exp(i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) a^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) k_t^{-1} d\mathbf{k} (2\pi)^{-3/2} 2^{-1/2}. \quad (16.33)$$

Здесь взят обычный нормировочный множитель. Проверка проводится просто:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) \varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}) \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) &= \\ &= \int \exp[i(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{L}\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}})] a^\dagger(\mathbf{L}\hat{\mathbf{k}}) k_t^{-1} d\mathbf{k} (2\pi)^{-3/2} 2^{-1/2} = \\ &= \int \exp[i\mathbf{L}\hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}})] a^\dagger(\mathbf{L}\hat{\mathbf{k}}) k_t^{-1} d\mathbf{k} (2\pi)^{-3/2} 2^{-1/2} = \\ &= \int \exp[i\hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}})] a^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) k_t^{-1} d\mathbf{k} (2\pi)^{-3/2} 2^{-1/2} = \\ &= \varphi^\dagger(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}}). \end{aligned}$$

Здесь мы перешли к новой переменной интегрирования, а именно $\mathbf{L}\hat{\mathbf{k}} \rightarrow \hat{\mathbf{k}}$, и воспользовались инвариантностью элемента объема $k_t^{-1} d\hat{\mathbf{k}}$ (гл. 15, § 4, п. Г). Вспоминая изложенное в § 2, п. А, можно сказать, что операторы $\varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}})$ описывают скалярное поле. [В формулу (16.32) входит вектор $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}}$ вместо вектора $\mathbf{L}^{-1}\hat{\mathbf{e}}$, фигурирующего в § 2, п. А. Это объясняется тем, что $\varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}})$ — оператор, а величина $\varphi(\hat{\mathbf{e}})$ в § 2, п. А есть значение классического поля в точке $\hat{\mathbf{e}}$.]

В случае ненулевого спина можно совершенно аналогично построить операторы поля $\varphi_\alpha(\hat{\mathbf{e}})$ с несколькими компонентами α , которые преобразуются так:

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) \varphi_\alpha(\hat{\mathbf{e}}) \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) = \sum_\beta M_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{L}) \varphi_\beta(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}}), \quad (16.34)$$

причем M — представление группы Лоренца. Это равенство означает возможность факторизации преобразования индексов α и аргументов полей, т. е. матрица M не зависит от вектора $\hat{\mathbf{e}}$. (О такой же факторизации говорилось в связи с уравнением Дирака в гл. 15, § 8, п. Г.) Значит,

в случае массивной частицы со спином $s = \frac{1}{2}$, поле типа (16.34) должно иметь четыре компоненты. Случай ненулевого спина мы кратко рассмотрим в п. Ж.

В. Физический смысл операторов поля

Прежде чем продолжить анализ следствий симметрии для квантовых полей, мы продемонстрируем, каким образом используются в физической теории операторы поля.

Обычно в квантовой механике операторы, представляющие физические наблюдаемые, не зависят от времени, а эволюция системы во времени описывается волновой функцией. Но нужно иметь в виду, что можно пользоваться также волновой функцией, которая от времени не зависит. Тогда эволюция системы во времени будет определяться явной зависимостью операторов от времени. Первый способ описания называется шредингеровской, а второй — гейзенберговской картиной. В релятивистской квантовой механике более удобна гейзенберговская картина, поскольку релятивистскую инвариантность легче определить для операторов, зависящих от четырех координат x, y, z и t . Отсутствие зависимости волновой функции от времени не является каким-либо недостатком схемы. Волновой функцией определяются «начальные условия» задачи. С математической точки зрения гамильтониан $H(p, r)$ в шредингеровской картине — это функция координат r и импульсов p , причем уравнение движения имеет следующий вид:

$$H(p, r)\psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t). \quad (16.35)$$

Формально гейзенберговская картина получается путем введения преобразования $S = \exp(iHt/\hbar)$. Тогда при любом начальном состоянии $\psi(r, 0)$ решение в последующий момент времени t определяется равенством

$$\psi(r, t) = S^{-1}\psi(r, 0). \quad (16.36)$$

Среднее значение $\langle \psi(r, t) | Q | \psi(r, t) \rangle$ оператора $Q(p, r)$ в шредингеровской картине совпадает в гейзенберговской картине со средним значением в начальном состоянии

преобразованного оператора $\mathbf{Q}' = \mathbf{S} \mathbf{Q} \mathbf{S}^{-1}$:

$$\langle \psi(\mathbf{r}, 0) | \mathbf{Q}' | \psi(\mathbf{r}, 0) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}, t) | \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{S} \mathbf{Q} \mathbf{S}^{-1}) \mathbf{S} | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ = \langle \psi(\mathbf{r}, t) | \mathbf{Q} | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в случае эрмитова гамильтониана \mathbf{H} преобразование \mathbf{S} унитарно. Таким образом, если в гейзенберговской картине известны зависящие от времени операторы \mathbf{Q}' , то можно вычислить любое среднее значение, определяемое начальным состоянием $\psi(\mathbf{r}, 0)$. Вместо нахождения волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ задача в гейзенберговской картине сводится к отысканию операторов $\mathbf{Q}'(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$. «Уравнение движения» для операторов \mathbf{Q}' следует прямо из определения. Если \mathbf{Q} — оператор, не зависящий от времени, то $d\mathbf{Q}'/dt = i\mathbf{H}\mathbf{Q}'/\hbar = -i\mathbf{Q}'\mathbf{H}/\hbar$, т. е.

$$[\mathbf{H}, \mathbf{Q}'] = -i\hbar \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{Q}}'. \quad (16.37)$$

Это гейзенберговский эквивалент уравнения Шредингера (16.35). В действительности преобразование \mathbf{S} есть сдвиг на величину t во времени, а $-i\mathbf{H}/\hbar c$ — инфинитезимальный оператор сдвига (гл. 15, § 4, п. А).

Рассмотрим простейший вид поля: эрмитово (действительное) поле $\Phi = \phi + \phi^\dagger$, где оператор ϕ^\dagger определяется равенством (16.33) через операторы $a^\dagger(\hat{\mathbf{k}})$ рождения частиц с массой $M = \hbar k/c$ и нулевым спином. Сумма $\phi + \phi^\dagger$ — единственная (с точностью до фазового множителя) линейная комбинация двух таких полей, которая удовлетворяет требованию причинности (п. Г). Будем считать такие частицы бозонами, для которых выполняются перестановочные соотношения (16.29а). Мы должны рассматривать зависящие от времени операторы поля Φ как операторы, подобные операторам \mathbf{Q}' в гейзенберговской картине. Возвращаясь к лагранжевой теории классических полей (§ 2, п. Б), построим из оператора поля Φ и его первых производных $\square\Phi$ простейший инвариантный относительно преобразований Пуанкаре оператор плотности лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\square\Phi \cdot \square\Phi - k^2 \Phi^2) \hbar c. \quad (16.38)$$

Второй член удовлетворяет условию инвариантности плотности \mathcal{L} относительно преобразований Пуанкаре, так как

Φ —скалярное поле. Первый член тоже инвариантен, поскольку мы взяли скалярное произведение производных поля. Ниже мы объясним, почему в плотности лагранжиана \mathcal{L} берется коэффициент k^2 . Действуя так же, как и в § 2, п. Б, построим из плотности лагранжиана плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\dot{\Phi}^2 c^{-2} + \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + k^2 \Phi^2) \hbar c \quad (16.39)$$

и компоненты плотности импульса

$$\mathcal{P}_q = \dot{\Phi} \nabla_q \Phi \hbar c^{-1}.$$

Путем алгебраических преобразований на основании определения (16.33) оператора поля ϕ^\dagger можно следующим образом выразить операторы \mathbf{H} и \mathbf{P} через операторы рождения и уничтожения частиц с массой $M = \hbar k/c$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{2} \hbar c \int k_t [\mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})] k_t^{-1} dk, \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{2} \hbar \int \mathbf{k} [\mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) + \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}})] k_t^{-1} dk.\end{aligned}$$

В большинстве полевых теорий возникают проблемы расходимостей. Рассматриваемый здесь простой пример теории не является исключением. В самом деле, вакуумное среднее $\langle 0 | \mathbf{H} | 0 \rangle$ бесконечно. В этом можно убедиться, воспользовавшись полученным на основании равенства (16.29а) соотношением $\mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}') = \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}') \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) + k_t \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Тогда, в силу того что $\mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) | 0 \rangle = 0$, из-за наличия δ -функции возникает бесконечность. Если же придавать физический смысл лишь разности между собственным значением оператора \mathbf{H} и его вакуумным средним, то мы получим конечные выражения для операторов

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}} &= \mathbf{H} - \langle 0 | \mathbf{H} | 0 \rangle = \hbar c \int k_t \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) k_t^{-1} dk, \\ \tilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{P} - \langle 0 | \mathbf{P} | 0 \rangle = \hbar \int \mathbf{k} \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}) k_t^{-1} dk.\end{aligned} \quad (16.40)$$

Сравнивая выражение (16.40) с оператором числа частиц (16.30), мы видим, что оператор $\tilde{\mathbf{H}}$ можно интерпретировать как интеграл по возможным состояниям \mathbf{k} от функции, равной произведению энергии частицы $\hbar c k_t$ на

число частиц в этом состоянии. Аналогичная интерпретация допустима и для операторов компонент импульса \mathbf{P} . Таким образом, от поля мы перешли к частицам.

Поскольку оператор Φ содержит как операторы a^\dagger , так и операторы a , в оператор H должны входить члены типа $a^\dagger a^\dagger$. Но члены такого вида, получающиеся из двух разных частей лагранжиана, взаимно уничтожаются. Лишь отсутствие членов типа $a^\dagger a^\dagger$ позволило нам интерпретировать оператор H как гамильтониан системы невзаимодействующих частиц, к чему мы стремились. Этим объясняется выбор коэффициента k^2 в выражении для плотности лагранжиана \mathcal{L} . Конечно, теория невзаимодействующих частиц, подобная изложенной выше, бессодержательна. Но, добавляя в лагранжиан другие члены, подобно тому как мы это делали в классических примерах § 1, п. В, можно ввести взаимодействие полей и, следовательно, взаимодействие частиц.

Так же как и в случае классических полей (§ 2, п. Б), закон сохранения величин \mathbf{P} и H вытекает из инвариантности плотности лагранжиана \mathcal{L} относительно пространственных и временных сдвигов.

Рассмотренное выше поле подходит для описания π^0 -мезонов. Может показаться, что некоторые наши рассуждения следуют по замкнутому кругу. Поэтому мы подведем краткий итог изложенному выше относительно квантованных полей. В гл. 15, § 4 мы классифицировали все возможные частицы по неприводимым представлениям группы Пуанкаре. Затем, пользуясь операторами рождения и уничтожения для частиц с нулевым спином, построили оператор скалярного поля $\varphi^\dagger(\mathbf{e})$, который преобразуется согласно соотношению (16.32). Из таких операторов мы построили лагранжиан, а также гамильтониан, собственные векторы которых соответствуют состояниям с определенным числом частиц. При этом мы не опирались ни на вариационный принцип (§ 1, п. А), ни на уравнения поля, которые, как показано в § 2, п. Б, следуют из этого принципа. Если же мы напишем уравнение поля (16.21) для операторной плотности лагранжиана (16.38), то получим дифференциальное уравнение

$$(\square^2 + k^2) \Phi(\mathbf{e}) = 0.$$

Это известное уравнение Клейна—Гордона, с которым мы уже встречались в гл. 15, § 8, п. В в связи с волновыми функциями частиц. Здесь же оно появляется в другой роли, как условие для операторов поля. Из выражения (16.33) для оператора $\phi^\dagger(\hat{e})$ следует, что оператор $\Phi(\hat{e})$ в самом деле удовлетворяет такому уравнению поля и, следовательно, удовлетворяет вариационному принципу. (Отметим сходство наших рассуждений с тем, что говорилось об уравнениях для волновых функций частиц в гл. 15, § 8.) При наличии взаимодействий уравнения поля играют более существенную роль.

Г. Причинность и теорема о спине и статистике

В классической релятивистской теории ни частица, ни какой-либо сигнал не могут двигаться со скоростью, превышающей скорость c . Поэтому квантовомеханические измерения в двух пространственно-временных точках \hat{e} и \hat{e}' должны быть независимы друг от друга, если разность векторов $\hat{e} - \hat{e}'$ пространственно-подобна, т. е. если $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > c|t - t'|$. Данное положение называется микроскопической причинностью. Математически независимость величин в квантовой механике выражается в том, что соответствующие операторы коммутируют между собой, т. е. должно выполняться условие

$$[Q(\hat{e}), Q(\hat{e}')] = 0, \quad (16.41)$$

если вектор $\hat{e}' - \hat{e}$ пространственно-подобен, а $Q(\hat{e})$ есть оператор некоторой наблюдаемой в точке \hat{e} . Подобно операторам \mathcal{H} и \mathcal{P}_a в равенствах (16.39) операторы $Q(\hat{e})$ обычно задаются в виде квадратичных комбинаций полей и их производных. Поэтому условие причинности (16.41) будет выполнено, если операторы поля в пространственно-разделенных точках коммутируют или антакоммутируют между собой. Проверим сначала, удовлетворяет ли такому условию рассматривавшийся в п. В оператор поля $\Phi = \phi + \phi^\dagger$. В силу равенства (16.27) и определения (16.33)

получаем $[\varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}), \varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}')] = [\varphi(\hat{\mathbf{e}}), \varphi(\hat{\mathbf{e}}')] = 0$. Значит,

$$[\Phi(\hat{\mathbf{e}}), \Phi(\hat{\mathbf{e}}')] = [\varphi(\hat{\mathbf{e}}), \varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}')] + [\varphi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}), \varphi(\hat{\mathbf{e}}')] =$$

$$= \frac{1}{2} \int \int k_t^{-1} k_t'^{-1} dk dk' \{ \exp[i(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}})] -$$

$$- \exp[i(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}')]\} k_t \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (2\pi)^{-3} =$$

$$= i \int k_t^{-1} dk \sin\{\hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}})\} (2\pi)^{-3}. \quad (16.42)$$

Интеграл, очевидно, зависит только от разности $\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}}$. Более того, он зависит лишь от «длины» $[c^2(t' - t)^2 - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2]^{1/2}$ вектора $\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}}$. В доказательство этого достаточно сослаться на то, что любую другую разность с той же «длиной» можно представить в виде $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}})$, где \mathbf{L} — преобразование Лоренца. Но $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{L}(\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{L}^{-1} \hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}})$. Тогда в силу инвариантности элемента объема $k_t^{-1} dk$ (гл. 15, § 4, п. Г) интеграл (16.42) не меняется при замене вектора $\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}}$ вектором $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}})$. Поэтому если интеграл (16.42) обращается в нуль для одного пространственно-подобного вектора, то он будет равен нулю для всех пространственно-подобных векторов той же «длины». Проще всего рассмотреть случай, когда $t' = t$. Тогда мы получаем простое выражение

$$[\Phi(\hat{\mathbf{e}}), \Phi(\hat{\mathbf{e}}')] = -i \int k_t^{-1} dk \sin\{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})\} (2\pi)^{-3}, \quad (16.43)$$

которое равно нулю, поскольку мы интегрируем по всему трехмерному пространству векторов \mathbf{k} нечетную функцию (синус).

Итак, поле Φ удовлетворяет условию причинности. Оно описывает частицы с нулевым спином и с симметричными многочастичными состояниями, т. е. частицы, операторы рождения и уничтожения которых удовлетворяют перестановочным соотношениям (16.27)–(16.29). Если мы выберем поле Φ , соответствующее частицам с нулевым спином и с антисимметричными многочастичными состояниями, т. е. с антиперестановочными соотношениями вместо соотношений (16.27)–(16.29), то, повторяя наши рассуждения, мы получим в равенстве (16.43) косинус вместо синуса. Тогда наш интеграл в нуль не

обращается и условие причинности не выполнено. Таким образом, предполагая условие причинности, мы приходим к заключению о том, что частицы с нулевым спином не могут подчиняться статистике Ферми, т. е. их волновые функции не могут быть антисимметричными. Проведенные выше рассуждения можно обобщить на случай любого целого спина. Вывод остается таким же. В случае полуцелых спинов в перестановочных соотношениях изменяется знак, и мы приходим к заключению, что статистика Бозе, соответствующая симметричным состояниям, противоречит причинности. Такие выводы называются «теоремой о спине и статистике».

Д. Античастицы

Заметим, что рассматривавшееся эрмитово поле $\Phi = \phi + \phi^\dagger$ — это единственная (с точностью до фазового множителя) линейная комбинация полей ϕ и ϕ^\dagger , удовлетворяющая условию причинности. Более общее неэрмитово поле можно построить лишь с помощью нового оператора поля χ^\dagger , который подобно оператору ϕ^\dagger задается равенством (16.33), где вместо операторов $a^\dagger(k)$ стоят операторы $b^\dagger(\hat{k})$. Это операторы рождения частиц, так же как и раньше, преобразующихся при преобразованиях Пуанкаре, но отличающихся другими, внутренними свойствами, такими, как еще не определенные заряд или гиперзаряд. Предположим, что для новых частиц операторы b^\dagger и b удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям (16.27)–(16.29), что и операторы a^\dagger и a , и будем считать, что все новые операторы коммутируют со всеми старыми операторами. (Для частиц с полуцелым спином нужно пользоваться антиперестановочными соотношениями.) Тогда можно, как и в п. Г, показать, что неэрмитово поле Φ , определенное соотношениями

$$\Phi = \phi + \chi^\dagger, \quad \Phi^\dagger = \phi^\dagger + \chi, \quad (16.44)$$

удовлетворяет условию причинности. Новые частицы называются античастицами по отношению к старым частицам.

Плотность лагранжиана простого вида можно построить подобно плотности (16.38), где для эрмитовости плотности \mathcal{L} член Φ^2 заменен членом $\Phi^\dagger \Phi$. Тогда выражения

для операторов H и P будут такими же, как и раньше, если не считать добавочных членов, содержащих операторы b вместо операторов a . Кроме того, появляется новая сохраняющаяся величина

$$Q = i \int dV (\Phi^\dagger \Phi - \Phi^\dagger \Phi),$$

которая следующим образом выражается через операторы a и b :

$$Q = \int [a^\dagger(\hat{k}) a(\hat{k}) - b^\dagger(\hat{k}) b(\hat{k})] k_t^{-1} dk.$$

Это оператор разности числа частиц и числа античастиц. В одночастичном состоянии $|\hat{k}\rangle$ среднее значение оператора Q равно $\langle \hat{k} | Q | \hat{k} \rangle = 1$, а в состоянии с одной античастицей $\langle Q \rangle = -1$. Оператор Q однозначно различает частицы и античастицы. Если частицы и античастицы — это π^+ - и π^- -мезоны, то наш оператор можно использовать в качестве оператора электрического заряда поля. Если же поле описывает нейтральные K^0 - и \bar{K}^0 -мезоны, различающиеся тем, что первый из них имеет гиперзаряд 1, а второй —1, то оператор Q представляет собой оператор гиперзаряда. Для поля K^\pm -мезонов, которое обладает как электрическим зарядом, так и гиперзарядом, оператор Q может соответствовать одновременно обоим зарядам. (При наличии нескольких разных частиц выражение для оператора Q становится более сложным, чем приведенное выше, и содержит добавочные члены, отвечающие другим частицам.) В данной ситуации выражения для операторов электрического заряда и гиперзаряда будут, естественно, различаться. Но кроме этих двух зарядов существуют и другие «заряды», такие, как число барионов или число лептонов (гл. 11, § 3).

Заметим, что по отношению к оператору Q поле Φ имеет очень простые свойства: оператор Φ^\dagger повышает, а оператор Φ понижает величину заряда Q на единицу. В результате заряд может сохраняться даже в случае лагранжиана, содержащего члены взаимодействия. Этого можно добиться путем добавления к плотности \mathcal{L} произведения некоторой степени поля Φ на соответствующую степень поля, имеющего противоположные свойства по

отношению к оператору \mathbf{Q} . Закон сохранения заряда связан с внутренними свойствами частицы. Тем не менее, вводя преобразование $\Phi \rightarrow \mathbf{U}\Phi\mathbf{U}^{-1}$, где $\mathbf{U} = \exp(i\varepsilon\mathbf{Q})$, можно связать сохранение заряда с преобразованиями поля подобно тому, как сохранение импульса связано с трансляциями. Поскольку поле Φ уменьшает значение оператора \mathbf{Q} на единицу, мы имеем $[\mathbf{Q}, \Phi] = -\Phi$, и, следовательно, наше преобразование дается соотношением $\Phi \rightarrow \exp(-i\varepsilon)\Phi$, т. е. состоит в изменении фазы на постоянную величину. Такое преобразование называется калибровочным (см. также § 1, п. В). Оператор \mathbf{Q} служит инфинитезимальным оператором для преобразования \mathbf{U} подобно оператору \mathbf{P} для преобразований трансляции. В действительности из инвариантности лагранжиана относительно преобразований такого типа всегда следует закон сохранения заряда. Более того, с инвариантностью связан «сохраняющий ток», который в рассмотренном примере определяется как четырехмерный вектор:

$$\mathbf{j} = i \{(\nabla\Phi^\dagger)\Phi - \Phi^\dagger(\nabla\Phi)\}, \quad j_t = -i \{\dot{\Phi}^\dagger\Phi - \Phi^\dagger\dot{\Phi}\}.$$

Пользуясь уравнением Клейна—Гордона, легко убедиться, что $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial j_t / \partial t = 0$. Именно из-за этого равенства ток называется сохраняющимся. Проинтегрируем его по всему трехмерному пространству и воспользуемся теоремой Гаусса: $\int \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$. Будем считать, что ток \mathbf{j} при больших r убывает быстрее, чем r^{-2} . Тогда поверхностный интеграл обращается в нуль и $(\partial/\partial t) \int j_t dV = 0$. Это — закон сохранения заряда, так как, сравнивая с приведенным выше выражением для заряда, мы находим, что $\mathbf{Q} = - \int \mathbf{j}_t dV$.

Наиболее хорошо изученной античастицей является, вероятно, позитрон — положительно заряженная частица с массой, равной массе электрона. Поэтому ее рассматривают как антиэлектрон. При высокоэнергетических столкновениях наблюдались отрицательно заряженные антипротоны. Поля этих частиц подобны описанным выше, но их спин равен $1/2\hbar$. Поля с ненулевым спином мы кратко рассмотрим в п. Ж.

Е. Зарядовое сопряжение и теорема РСТ

Мы продолжим свое очень краткое обсуждение теории квантованных полей и рассмотрим теорему РСТ. Эта теорема связана с произведением трех преобразований: преобразования пространственной инверсии P , которое в данной книге (гл. 15, § 3 и 5) обозначалось символом I ; преобразования T , отражения времени, которое мы обозначали символом Γ (гл. 15, § 7, п. Г), и нового преобразования C , называемого зарядовым сопряжением, которое частицу переводит в античастицу и наоборот. Произведение РСТ рассматривается потому, что при очень общих предположениях удается доказать, что РСТ есть преобразование симметрии. В случае электромагнитных и сильных ядерных взаимодействий это не очень важно, поскольку эксперименты показывают, что любое из трех преобразований P , C и T является преобразованием симметрии. В случае же слабых ядерных взаимодействий ни преобразование P , ни преобразование C не является преобразованием симметрии, хотя опыт свидетельствует о том, что произведение РС и преобразование T будут преобразованиями симметрии, и это согласуется с теоремой РСТ. (Имеются некоторые экспериментальные данные, указывающие на небольшое нарушение симметрии относительно преобразования РС в слабых взаимодействиях, но это все-таки не противоречит симметрии относительно преобразования РСТ.)

Посмотрим, как действуют эти преобразования на поле Φ , определенное в п. Д. Мы ограничимся случаем нулевого спина, но все сказанное можно будет обобщить и на случай любого спина. Чтобы сохранить единство обозначений, мы, как и в предыдущих главах, оператор, соответствующий преобразованию P , обозначим через $T(I)$, а оператор преобразования T — через Γ . В силу сказанного в гл. 15, § 5 операторы рождения частиц при пространственной инверсии ведут себя соответственно равенству $T(I)a^\dagger(\vec{k})T^{-1}(I)=\pm a^\dagger(I\vec{k})$, где знак « \pm » отвечает внутренней четности частицы. Аналогично при отражении времени из равенства (15.108) в случае нулевого спина получаем $\Gamma a^\dagger(\vec{k})\Gamma^{-1}=a^\dagger(I\vec{k})$. Унитарный оператор зарядового сопряжения C определим соотношениями $C^2=1$

и $C\hat{a}^\dagger(k)C^{-1} = b^\dagger(k)$, где b^\dagger — оператор, соответствующий античастицам. Тогда с учетом антиунитарности оператора Γ имеем

$$T(I)C\Gamma\Phi^\dagger(\hat{e})(T(I)C\Gamma)^{-1} = \pm \Phi(-\hat{e}). \quad (16.45)$$

Значит, действие оператора РСТ [или оператора $T(I)C\Gamma$ в наших обозначениях] на поле сводится к эрмитовому сопряжению и замене вектора \hat{e} вектором $-\hat{e}$. Знак « \pm » в равенстве (16.45) не существен из-за произвола в выборе фазового множителя оператора Γ (гл. 15, § 7, п. Г). Преобразование $\hat{e} \rightarrow -\hat{e}$, состоящее в отражении времени и пространства, называют иногда полным отражением. В силу эрмитовости плотности лагранжиана \mathcal{L} , построенной из поля Φ аналогично выражению (16.38), преобразование РСТ сводится к замене $\mathcal{L}(\hat{e}) \rightarrow \mathcal{L}(-\hat{e})$. Для плотности гамильтониана $\mathcal{H}(\hat{e})$, построенной из плотности $\mathcal{L}(\hat{e})$ подобно выражению (16.39), получается такое же преобразование: $\mathcal{H}(\hat{e}) \rightarrow \mathcal{H}(-\hat{e})$. И наконец, гамильтониан $H = \int \mathcal{H}(\hat{e}) dV$, определяемый как интеграл по всему трехмерному пространству, преобразуется следующим образом: $H(t) \rightarrow H(-t)$. Значит, оператор H не меняется при преобразовании РСТ, так как оператор H не должен зависеть от времени. Тем самым доказано, что РСТ есть преобразование симметрии. Значение полученного результата состоит в том, что намеченное выше доказательство пригодно и для лагранжиана, содержащего члены взаимодействия. Доказательство основано лишь на эрмитовости лагранжиана и инвариантности его относительно собственных преобразований Пуанкаре. (Подразумевается также, что частицы точечные и не имеют внутренней структуры. Мы решаем дифференциальные уравнения и, следовательно, предполагаем, что пространство непрерывно, а не дискретно.)

Более строгое доказательство теоремы РСТ основано на том, что из инвариантности теории поля относительно собственных преобразований Пуанкаре следует инвариантность относительно собственных комплексных преобразований Пуанкаре, а данная комплексная группа содержит полное отражение $\hat{e} \rightarrow -\hat{e}$.

Продемонстрируем симметрию относительно преобразования PCT на двух примерах, где нет симметрии относительно преобразования P или C , но произведение PC сохраняется. В гл. 15, § 7, п. В мы убедились, что нейтрино не имеет определенной четности. В самом деле, преобразование отражения дает частицу со спиральностью, соответствующей правому винту. Такая частица экспериментально не наблюдалась. Преобразование же PC будет переводить нейтрино со спиральностью, соответствующей левому винту, в антинейтрино со спиральностью, соответствующей правому винту. Такая частица обнаружена. Здесь, хотя оператор P не сохраняется, произведение CP так же, как оператор T , сохраняется.

Второй пример — K^0 -мезон, который имеет ненулевую массу, нулевой спин и странность —1. Его античастицей является \bar{K}^0 -мезон со странностью +1. Эти частицы рождаются в сильных ядерных взаимодействиях, в которых странность сохраняется. Распадаются же они в слабых взаимодействиях, где странность не сохраняется. При этом операторы C и P в отдельности не сохраняются, но произведение CP сохраняется с большой точностью. Для K^0 -мезона наблюдались два канала распада: на два π -мезона с временем жизни K^0 -мезона около 10^{-10} с и на три π -мезона с временем жизни K^0 -мезона около 10^{-7} с. Эти результаты можно объяснить следующим образом. Частица K^0 характеризуется определенной четностью. Поэтому мы имеем $CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$. Значит, линейные комбинации состояний $|K_S^0\rangle = 2^{-1/2}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$, $|K_L^0\rangle = 2^{-1/2}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$ должны быть собственными векторами оператора CP : $CP|K_S^0\rangle = |K_S^0\rangle$, $CP|K_L^0\rangle = -|K_L^0\rangle$. Вектор $|K^0\rangle$ можно представить в виде суммы двух векторов: $|K^0\rangle = 2^{-1/2}(|K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle)$. Низшее состояние системы из двух π -мезонов с нулевым относительным угловым моментом является собственным вектором оператора CP с собственным значением +1. Следовательно, в процессе, в котором сохраняется CP , лишь компонента $|K_S^0\rangle$ может распадаться таким образом. Другая компонента $|K_L^0\rangle$ распадается сложнее: на три π -мезона, комбинация которых соответствует собственному вектору оператора CP с собственным значением —1. Естественно, время распада на два π -мезона меньше, и нижние ин-

дексы S и L у символа K^0 -мезона соответствуют малому и большому временам распада. В экспериментальном отношении возникает довольно интересная ситуация. Рассмотрим рассеяние π^- -мезонов на протонах, в результате которого могут рождаться потоки K^0 -частиц: $\pi^- + p = K^0 + \Lambda$. Пройдя короткий отрезок пути, компонента K_S^0 распадается. Остается компонента K_L^0 , которая представляет собой смесь частицы K^0 с ее античастицей \bar{K}^0 . Иначе говоря, поток, первоначально содержащий лишь K^0 -частицы, в результате распада компонент K_S^0 постепенно приобретает составляющую \bar{K}^0 . Наличие в потоке \bar{K}^0 -частиц можно обнаружить, регистрируя процесс

$$\bar{K}^0 + p = \pi^+ + \Lambda, \quad (16.46)$$

который невозможен для K^0 -частиц в силу закона сохранения странности. Другими словами, процесс (16.46) невозможен для первоначального потока частиц и становится возможным лишь после распада составляющей K_S^0 .

Отметим, что проведенные недавно эксперименты обнаружили очень слабое нарушение СР-симметрии в распадах K^0 -частиц. Предполагается, что существуют какие-то «сверхслабые» взаимодействия, при которых нарушаются как СР-симметрия, так и Т-симметрия, но симметрия СРТ все-таки сохраняется. «Сила» таких взаимодействий должна составлять не более 10^{-8} «силы» слабых взаимодействий. Таким образом, можно полагать, что абсолютных симметрий очень мало. Вместо этого можно говорить об иерархии взаимодействий, сила которых быстро убывает по мере того, как нарушаются все большее число симметрий.

Ж. Поля частиц с ненулевым спином

В данной главе, говоря о полях, мы до сих пор ограничивались случаем нулевого спина. Наш метод естественным образом обобщается на более общий случай. Мы проведем это обобщение для трех интересных случаев: для случая $s=1/2$ и массы, не равной нулю, для случая нулевой массы и $|m|=1/2$ (предложенное Вейлем поле нейтрино), а также для случая $|m|=1$ (электромагнитное поле).

Поле Дирака

Напомним, что в гл. 15, § 8, п. Г мы ввели четырехкомпонентное пространство, хотя при каждом векторе \hat{k} частица имеет лишь два независимых состояния с $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Это потребовалось для того, чтобы отделить преобразование компонент от преобразования вектора \hat{k} . С помощью уравнения Дирака (15.132) четырехкомпонентное пространство сводилось к двухкомпонентному пространству. Аналогично здесь мы построим четырехкомпонентное поле. Вместо простого закона (16.32) для преобразования скалярного поля мы теперь требуем, чтобы четыре компоненты $\Phi_\alpha(\hat{e})$ операторов поля преобразовались согласно соотношению (16.34), которое можно представить в виде

$$T(\hat{\epsilon}, L) \Phi(\hat{e}) T^{-1}(\hat{\epsilon}, L) = M^{-1}(L) \Phi(L\hat{e} + \hat{\epsilon}), \quad (16.47)$$

где M — 4×4 -матрица, введенная в соотношении (15.128), а символ Φ теперь означает вектор-столбец. Это требование согласуется с трансформационными свойствами классических полей (16.19), поскольку среднее $\langle \psi | \Phi_\alpha(\hat{e}) | \psi \rangle$ соответствует классическому полю $\varphi_\alpha(\hat{e})$. Напомним, что $T(\hat{\epsilon}, L)$ — унитарный оператор, действующий на векторы состояний $|\psi\rangle$. Хотя матрица M не унитарна, она удовлетворяет соотношению $M^\dagger \gamma_t M = \gamma_t$ (гл. 15, § 8, п. Г). Поэтому, переходя в равенстве (16.47) к эрмитово-сопряженным величинам, получаем $T(\hat{\epsilon}, L) \Phi^\dagger(\hat{e}) T^{-1}(\hat{\epsilon}, L) = \Phi^\dagger(L\hat{e} + \hat{\epsilon}) (M^{-1})^\dagger = \Phi^\dagger(L\hat{e} + \hat{\epsilon}) \gamma_t M \gamma_t$. Вводя обозначение $\bar{\Phi}(\hat{e}) = \Phi^\dagger(\hat{e}) \gamma_t$, перепишем это равенство в виде

$$T(\hat{\epsilon}, L) \bar{\Phi}(\hat{e}) T^{-1}(\hat{\epsilon}, L) = \bar{\Phi}(L\hat{e} + \hat{\epsilon}) M(L). \quad (16.48)$$

Значит, преобразование вектор-строки $\bar{\Phi}$ сводится к умножению справа на матрицу $M(L)$.

Четырехкомпонентный оператор поля Φ построим с помощью формул, аналогичных формулам (16.44) и (16.33), но используя в них операторы $a^\dagger(k m_s)$ рождения частиц со спином $s = \frac{1}{2}$ и операторы $b^\dagger(k m_s)$ рождения

соответствующих античастиц. Итак,

$$\Phi_{\alpha}(\hat{\mathbf{e}}) = k^{1/2}(2\pi)^{-3/2} \int k_i^{-1} d\mathbf{k} \sum_{m_s} \{ u_{\alpha m_s}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}} m_s) \exp(-i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) + \\ + v_{\alpha m_s}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{b}^\dagger(\hat{\mathbf{k}} m_s) \exp(i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \}, \quad (16.49)$$

где взят обычный нормировочный множитель, а коэффициенты u и v подобраны так, чтобы поле преобразовалось согласно соотношению (16.47) и удовлетворяло требованиям причинности. Рассматривая величины u и v как 4×2 -матрицы, мы покажем, что они имеют вид

$$\mathbf{u}'(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{Q}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{Q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16.50)$$

где буст \mathbf{Q} , от которого зависят 2×2 -матрицы \mathbf{L} , переводит вектор $(0 \ 0 \ 0 \ 1)$ в вектор $\hat{\mathbf{k}}$ [формула (15.125)]. [В самом деле, два столбца матрицы $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{k}})$ — это столбцы двух одночастичных состояний $|\hat{\mathbf{k}} \pm\rangle$, определяемых формулой (15.135 а).]

Для доказательства того, что поле Φ преобразуется требуемым образом, мы должны воспользоваться известными трансформационными свойствами (15.59) состояний, соответствующих частицам и (античастицам): $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}} m_s) \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) = \exp(i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \sum_{m'_s} D_{m_s m'_s}^{(1/2)}(\mathbf{R}') \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}' m'_s)$.

Здесь $\hat{\mathbf{k}}' = \mathbf{L}\hat{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{R}' = \mathbf{Q}'^{-1}\mathbf{L}\mathbf{Q}$, согласно формуле (15.60), где \mathbf{Q}' — буст для вектора $\hat{\mathbf{k}}'$. Переходя в этом равенстве к эрмитово-сопряженным величинам, в силу унитарности матрицы \mathbf{D} получаем $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}} m_s) \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{L}) = \exp(-i\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}) \sum_{m'_s} D_{m_s m'_s}^{(1/2)}(\mathbf{R}'^{-1}) \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}' m'_s)$. Для преобразований поворота $\mathbf{D}^{1/2} = \mathbf{L}^{(1/2, 0)} = \mathbf{L}^{(0, 1/2)}$. Поэтому нашу матрицу можно представить в виде произведения матриц:

$$\mathbf{D}^{(1/2)}(\mathbf{R}'^{-1}) = \mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{L}^{-1}) \mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{Q}') = \quad (16.51)$$

$$= \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{L}^{-1}) (\mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{Q}')). \quad (16.51a)$$

Тогда из соотношения (16.49) следует выражение

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{L}) \Phi_\alpha(\hat{\mathbf{e}}) \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{L}) &= k^{1/2} (2\pi)^{-3/2} \int k_t^{-1} dk \sum_{m_s} \{ \exp(-i\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}} - \\ &- i\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}} [\mathbf{u}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{D}^{(1/2)}(\mathbf{R}'^{-1})]_{\alpha m_s'} \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}' m_s') + \exp(i\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}} + i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \times \\ &\quad \times [\mathbf{v}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{D}^{(1/2)*}(\mathbf{R}'^{-1})]_{\alpha m_s'} \mathbf{b}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}' m_s'), \quad (16.52) \end{aligned}$$

где мы опять воспользовались унитарностью матрицы D и записали ее в виде $D_{m_s m_s'}^{(1/2)}(\mathsf{R}') = D_{m_s m_s'}^{(1/2)*}(\mathsf{R}'^{-1})$. С учетом соотношений (16.50) и двух равенств (16.51) выражения для матриц uD и vD^* значительно упрощаются:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{D}^{(1/2)} (\mathbf{R}'^{-1}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{L}^{-1}) & \mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{Q}') \\ \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{L}^{-1}) & \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{Q}') \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}(\hat{\mathbf{k}}'), \\ \mathbf{v}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{D}^{(1/2)*} (\mathbf{R}'^{-1}) &= \mathbf{v}(\hat{\mathbf{k}}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D}^{(1/2)} (\mathbf{R}'^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{L}^{-1}) & \mathbf{L}^{(1/2, 0)}(\mathbf{Q}') \\ \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{L}^{-1}) & \mathbf{L}^{(0, 1/2)}(\mathbf{Q}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{v}(\hat{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \quad (16.53)$$

Здесь матрица M взята в форме (15.128). Матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$ нужны для преобразования матрицы D^* в матрицу D . (Согласно сказанному в гл. 7, § 7, такие представления эквивалентны.) Подставляя теперь выражения (16.53) в равенство (16.52) и переходя затем от переменной интегрирования k к переменной k' , получаем желаемый результат (16.47). Заметим, что наш вывод справедлив и в том случае, если первые две строки матрицы v в равенстве (16.50) не берутся со знаком минус. Но такой выбор знака гарантирует соответствие принципу причинности. В этом можно убедиться, вычислив, как в п. Г, антикоммутатор полей $\Phi^\dagger(\hat{e})$ и $\Phi(\hat{e}')$.

Интересным следствием структуры поля Дирака является то, что внутренняя четность частицы должна быть противоположна внутренней четности античастицы. Этим поле Дирака отличается от случая нулевого спина, где обе четности совпадали. Прежде чем подробно останов-

ливаться на поле Дирака, обратимся на время к случаю нулевого спина. Пусть $T(l)$ —унитарный оператор, соответствующий пространственной инверсии l . Обозначим через π внутреннюю четность частицы. Из соотношения (15.87) следует, что $T(l) \mathbf{a}^\dagger(\hat{k}) T^{-1}(l) = \pi \mathbf{a}^\dagger(l\hat{k})$, $T(l) \mathbf{a}(\hat{k}) \times T^{-1}(l) = \pi \mathbf{a}(l\hat{k})$. Обозначим внутреннюю четность античастицы через π' . Тогда $T(l) \mathbf{b}^\dagger(\hat{k}) T^{-1}(l) = \pi' \mathbf{b}^\dagger(l\hat{k})$. Если потребовать, чтобы поле Φ имело определенную четность, то

$$T(l) \Phi(\hat{e}) T^{-1}(l) = \pm \Phi(l\hat{e}). \quad (16.54)$$

Из определения (16.44) поля Φ и свойств операторов \mathbf{a} и \mathbf{b}^\dagger следует, что равенство (16.54) справедливо лишь при $\pi = \pi'$. В этом случае

$$T(l) \Phi(\hat{e}) T^{-1}(l) = \pi \Phi(l\hat{e}), \quad (16.55)$$

т. е. четностью частицы задается четность поля. Для п-мезонов четность $\pi = -1$ и поле нечетно. (Просим извинить нас за двоякое использование символа π в одном предложении!) В этом случае наше скалярное поле называется псевдоскалярным.

Возвращаясь к полю Дирака, мы должны начать с преобразования инверсии для состояний, соответствующих частицам:

$$T(l) \mathbf{a}^\dagger(\hat{k}m_s) T^{-1}(l) = \pi \mathbf{a}^\dagger(l\hat{k}m_s). \quad (16.56)$$

Будем считать, что

$$T(l) \mathbf{b}^\dagger(\hat{k}m_s) T^{-1}(l) = \pi' \mathbf{b}^\dagger(l\hat{k}m_s). \quad (16.57)$$

Напомним (гл. 15, § 8, п. Г), что оператор инверсии в четырехкомпонентном пространстве представляется матрицей γ_t . Поэтому мы потребуем, чтобы поле, имеющее определенную четность, удовлетворяло соотношению

$$T(l) \Phi(\hat{e}) T^{-1}(l) = \pm \gamma_t \Phi(l\hat{e}), \quad (16.58)$$

где $\Phi(\hat{e})$ —опять вектор-столбец. Но, подставляя выражения (16.56) и (16.57) в равенство (16.49), получаем

$$T(l) \Phi_\alpha(\hat{e}) T^{-1}(l) = k^{1/2} (2\pi)^{-3/2} \int k^{-1} dk \sum_{m_s} \{ u_{\alpha m_s}(\hat{k}) \pi \mathbf{a}(l\hat{k}m_s) \times \exp(-i\hat{k} \cdot \hat{e}) + v_{\alpha m_s}(\hat{k}) \pi' \mathbf{b}^\dagger(l\hat{k}m_s) \exp(i\hat{k} \cdot \hat{e}) \}. \quad (16.59)$$

Чтобы связать это выражение с полем $\Phi(\hat{e})$, произведем замену переменной интегрирования $I\hat{k} \rightarrow \hat{k}$. Воспользуемся также свойством $u(I\hat{k}) = \gamma_t u(\hat{k})$, которое вытекает из явного вида (15.135а) матрицы $u(\hat{k})$. Аналогично $v(I\hat{k}) = -\gamma_t v(\hat{k})$, и, так как знак здесь другой, соотношение (16.59) сводится к виду (16.58) лишь при $\pi' = -\pi$. В этом случае

$$T(I)\Phi(\hat{e})T^{-1}(I) = \pi\gamma_t\Phi(\hat{e}). \quad (16.60)$$

Экспериментальные данные для системы электрон—позитрон подтверждают наш вывод о том, что в случае $s = 1/2$, четность античастицы противоположна четности частицы.

Уравнение Дирака (15.131) написано для одночастичных состояний. В него входят инфинитезимальные операторы $\hat{\mathbf{P}}$, соответствующие трансляциям векторов состояния. Покажем, что операторы поля $\Phi(\hat{e})$ удовлетворяют уравнению Дирака

$$(\hat{\gamma} \cdot \square + ik)\Phi(\hat{e}) = 0, \quad (16.61)$$

где $\square = (-\nabla, \partial/\partial ct)$ —дифференциальный оператор, действующий на переменные \hat{e} . Этот результат прямо следует из определения (16.49). [Нужно оператором \square подействовать на экспоненты и применить соотношение (16.60).] Уравнение Дирака (16.61)—это опять уравнение поля, следующее из лагранжиана. В данном случае плотность лагранжиана, которая приводит к этому уравнению поля, имеет вид $\mathcal{L} = \Phi(\hat{e})(\hat{\gamma} \cdot \square + ik)\Phi(\hat{e})$. Как и в п. В, такой плотности лагранжиана соответствует описание, основанное на представлении о частицах.

Поле нейтрино.

В гл. 15, § 8, п. Д мы, пользуясь представлением $L^{(0,1/2)}$ и уравнением Вейля, показали, что одночастичное состояние для нейтрино, соответствующее нулевой массе и $m = -1/2$, представляется в двухкомпонентной форме. Поэтому мы будем строить двухкомпонентный оператор поля $\Phi(\hat{e})$, подобный оператору поля, определяемому равенством (16.49). Предполагается, что он преобразуется со-

гласно равенству

$$T(\hat{\varepsilon}, L) \Phi(\hat{e}) T^{-1}(\hat{\varepsilon}, L) = (L^{(0, -1/2)})^{-1} \Phi(L\hat{e} + \hat{\varepsilon}). \quad (16.62)$$

Поле будет строиться из операторов рождения нейтрино $a^\dagger(\hat{k}-)$ и операторов рождения антинейтрино $b^\dagger(\hat{k}+)$. Знак минус в обозначении оператора a^\dagger напоминает о том, что для нейтрино $m = -1/2$. Нейтрино преобразуется по представлению $P^{(0, -1/2)}$, согласно равенству (15.68) или равенству (15.144). Антинейтрино мы приписываем положительную спиральность, но это, как мы увидим, необходимо для того, чтобы поле удовлетворяло условиям инвариантности и причинности. Положим

$$\Phi_\alpha(\hat{e}) = (2\pi)^{-3/2} \int k_t^{-1} dk w_\alpha(\hat{k}) \{ a(\hat{k}-) \exp(-i\hat{k}\cdot\hat{e}) + b^\dagger(\hat{k}+) \exp(i\hat{k}\cdot\hat{e}) \}. \quad (16.63)$$

Мы покажем, что коэффициенты w , которые в данном случае являются 2×1 -матрицами, определяются вторым столбцом матрицы $L^{(0, -1/2)}(R_{xy}Q_z)$, где $R_{xy}Q_z$ — преобразование Лоренца, которое задавалось в гл. 15, § 4, п. Б как преобразование, переводящее вектор $(0, 0, 1, 1)$ в вектор \hat{k} . Выбор такого выражения оправдан тем, что, применяя соотношение (15.144) для преобразования частиц к уравнению (16.63), получаем

$$\begin{aligned} T(\hat{\varepsilon}, L) \Phi_\alpha(\hat{e}) T^{-1}(\hat{\varepsilon}, L) &= (2\pi)^{-3/2} \int k_t^{-1} dk w_\alpha(\hat{k}) \times \\ &\times \{ \exp(-i\hat{k}'\cdot\hat{e} - i\hat{k}\cdot\hat{e}) L_{-1/2-1/2}^{(0, -1/2)} [(R'_{xy}Q'_z)^{-1} LR_{xy}Q_z]^* a(\hat{k}'-) + \\ &+ \exp(i\hat{k}'\cdot\hat{e} + i\hat{k}\cdot\hat{e}) L_{1/2-1/2}^{(1/2, 0)} [(R'_{xy}Q'_z)^{-1} LR_{xy}Q_z] b^\dagger(\hat{k}'+) \}. \end{aligned} \quad (16.64)$$

Представляя вектор $w(\hat{k})$ в виде второго столбца матрицы $L^{(0, -1/2)}$: $w(\hat{k}) = L^{(0, -1/2)}(R_{xy}Q_z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, мы в силу единичности преобразования (15.144) имеем $w(\hat{k}) L_{-1/2-1/2}^{(0, -1/2)} \times [(\mathbf{R}'_{xy}Q'_z)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{R}_{xy}Q_z]^* = \{ L^{(0, -1/2)}(R_{xy}Q_z) L^{(0, -1/2)} [(\mathbf{R}_{xy}Q_z)^{-1} \times \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}'_{xy}Q'_z] \} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L^{(0, -1/2)}(L^{-1}) w(\hat{k}')$. Здесь мы воспользовались тем, что $L_{1/2-1/2}^{(0, -1/2)} [(\mathbf{R}'_{xy}Q'_z)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{R}_{xy}Q_z] = 0$ [см. текст после формулы (15.144)]. Поскольку представления $L^{(1/2, 0)}$ и $L^{(0, -1/2)*}$ эквивалентны (гл. 15, § 2, п. Д), подобное же

соотношение справедливо и для второго члена равенства (16.64): $w(\hat{k}) L_{1/2}^{(1/2, 0)} [(\mathbf{R}'_{xy} \mathbf{Q}'_z)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{R}_{xy} \mathbf{Q}_z] = L^{(0, 1/2)} (L^{-1}) w(\hat{k}')$. Подставляя оба эти выражения в равенство (16.64) и производя замену переменной интегрирования $\hat{k}' \rightarrow \hat{k}$, приходим к желаемому результату (16.62).

Так же как и в предыдущих примерах, поле $\Phi(\hat{e})$ удовлетворяет соответствующему уравнению поля. В данном случае это уравнение Вейля (15.146):

$$\left(s \cdot \nabla - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi(\hat{e}) = 0.$$

Плотность лагранжиана для свободного поля нейтрино равна

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger(\hat{e}) \left(s \cdot \nabla - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi(\hat{e}).$$

Заметим, что поле Φ^\dagger преобразуется по представлению $L^{(1/2, 0)}$ и оператор Вейля является компонентой четырехмерного вектора $\hat{\mathbf{W}} + i m \hat{\mathbf{P}}$. Довольно удивительно, что для инвариантности плотности \mathcal{L} не требуются другие компоненты. Но как объясняется в тексте, следующем за формулой (15.145), это обусловлено особой формой сопротивлений между этими компонентами.

Хотя нейтрино не имеет электрического заряда, мы можем, как и в п. Д, ввести оператор \mathbf{Q} разности между числом нейтрино и числом антинейтрино. Он называется оператором «лептонного заряда». Если аналогичный заряд приписать электронам и мюонам, то можно доказать экспериментально, что такой лептонный заряд сохраняется подобно электрическому заряду. Это можно продемонстрировать на примере β -распада $n \rightarrow p + e + \nu$ нейтрона на протон, электрон и антинейтрино $\bar{\nu}$. (Более тяжелым частицам n и p приписывается нулевой лептонный заряд.) Сказанное подтверждается многими экспериментами. Например, процесс $\bar{\nu} + n \rightarrow p + e$ не наблюдается, но наблюдается процесс $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e$, где e — антиэлектрон (т. е. позитрон). Отметим, что более тяжелые частицы, подобные нуклонам n и p , образуют семейство частиц, называемых «барионами», с барионным зарядом $+1$. Барионный заряд — еще один пример сохраняющегося заряда.

В гл. 15, § 7, п. В мы видели, что пространственная инверсия меняет спиральность, т. е. изменяет знак величины m . Поэтому поле нейтрино не может иметь определенной четности, как поле Дирака. Пространственная инверсия должна переводить нейтрино ($m = -\frac{1}{2}$) в нейтрино с $m = \frac{1}{2}$, но в природе нет такой частицы, и, следовательно, она не может входить в поле. Однако существуют антинейтрино с $m = \frac{1}{2}$. Если мы, как в п. Е, введем оператор зарядового сопряжения C , то относительно комбинированного преобразования зарядового сопряжения и пространственной инверсии поле может преобразоваться простым образом. Комбинированное преобразование обозначим символом CP . Унитарный оператор CP мы определим соотношениями $CPa^\dagger(\hat{k}-)(CP)^{-1} = \eta(\hat{k}) b^\dagger(l\hat{k}+)$, $(CP)^2 = 1$, где $\eta(\hat{k})$ — фазовый множитель. Основываясь на свойствах вектора $w(\hat{k})$, мы можем доказать, что оператор CP преобразует компоненты поля $\Phi(\hat{e})$ в компоненты поля $\Phi^\dagger(\hat{l}e)$. В самом деле,

$$CP\Phi_\alpha(\hat{e})(CP)^{-1} = \sum_\beta (l\sigma_y)_{\alpha\beta} \Phi_\beta^\dagger(l\hat{e}),$$

где $\sigma_y = 2s_y$ есть 2×2 -матрица спина. Значит, можно так построить лагранжиан, содержащий поле нейтрино, что он будет инвариантным относительно преобразования CP , но не инвариантным относительно отдельных преобразований C или P . (Подчеркнем, что сохранение заряда и инвариантность относительно зарядового сопряжения — это совершенно разные свойства.)

Электромагнитное поле

Электромагнитное поле — хорошо известное, классическое понятие. Электромагнитное поле проявляется и на макроскопических расстояниях. Этим оно отличается от ядерных полей, которые убывают экспоненциально с расстоянием, начиная с расстояний порядка 10^{-13} см. Тем не менее для построения последовательной теории, а также для согласования теории с точными экспериментами мы должны прокvantовать электромагнитное поле. Мы убедимся ниже, что если операторы поля соответствуют

частицам нулевой массы с $m = \pm 1$, т. е. преобразуются по представлениям группы Пуанкаре $P^{(0, \pm 1)}$, то построенное таким образом поле обладает свойствами электромагнитного поля. Соответствующие частицы называются фотонами. Классическая интерпретация поля восстанавливается точно так же, как это делается при переходе от квантовой к классической механике частиц. Метод квантования аналогичен методу квантования поля нейтрино. Нужно только заменить $|m| = 1/2$ на $|m| = 1$ и внести еще два существенных изменения. Прежде всего, для фотона возможны состояния с двумя спиральностями $m = \pm 1$. Следовательно, можно построить поле, имеющее определенную четность, т. е. при электромагнитных взаимодействиях четность может сохраняться. Второе изменение связано с тем, что фотон не несет заряда, а значит нет античастицы, отличающейся от самого фотона. В поле нейтрино присутствовали состояния с обеими спиральностями: одно для частицы, другое для античастицы. Принимая во внимание два указанных отличия, мы получаем естественное обобщение равенства (16.63) на случай $|m| = 1$:

$$\Phi_{\alpha}(\hat{\mathbf{e}}) = (2\pi)^{-3/2} \int k_t^{-1} dk \, w_{\alpha}^{\pm}(\hat{\mathbf{k}}) \{ a(\hat{\mathbf{k}}-) \exp(-i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) + \\ + a^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}}+) \exp(i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \}, \quad (16.65)$$

где $a^{\dagger}(\hat{\mathbf{k}} \pm)$ — операторы рождения фотонов со спиральностями ± 1 . Теперь само поле и коэффициенты $w(\hat{\mathbf{k}})$ являются трехмерными векторами. Выбирая в качестве вектора $w(\hat{\mathbf{k}})$ трехмерный вектор, стоящий в третьем столбце матрицы $L^{(0, 1)}(R_{xy} Q_z)$ (он соответствует значению $m = -1$), мы, как и раньше, можем доказать, что поля преобразуются следующим образом:

$$T(\varepsilon, L) \Phi(\hat{\mathbf{e}}) T^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, L) = (L^{(0, 1)})^{-1} \Phi(L\hat{\mathbf{e}} + \varepsilon), \quad (16.66)$$

$$T(\hat{\mathbf{e}}, L) \Phi^{\dagger}(\hat{\mathbf{e}}) T^{-1}(\hat{\mathbf{e}}, L) = \Phi^{\dagger}(L\hat{\mathbf{e}} + \varepsilon) L^{(1, 0)}.$$

Такой выбор вектора $w(\hat{\mathbf{k}})$ обосновывается точно так же, как и в случае нейтрино. Но необходимо выяснить струк-

туру вектора $\mathbf{w}(\hat{\mathbf{k}})$. Он дается выражением

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(\hat{\mathbf{k}}) &= \mathbf{L}^{(0, 1)}(\mathbf{R}_{xy} \mathbf{Q}_z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L}^{(0, 1)}(\mathbf{R}_{xy}) \mathbf{L}^{(0, 1)}(\mathbf{Q}_z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= k_t \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{R}_{xy}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (16.67)$$

где мы воспользовались тем, что для вращений $\mathbf{L}^{(0, 1)}(\mathbf{R}_{xy}) = \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{R}_{xy})$, а также тем, что для буста $\mathbf{Q}_z = \exp(b\mathbf{Y}_z) = \exp(ib\mathbf{X}_z) = \exp(bs_z)$ матрица $\mathbf{L}^{(0, 1)}(\mathbf{Q}_z)$ становится диагональной, причем $\mathbf{L}^{(0, 1)}_{-1}(\mathbf{Q}_z) = \exp(-b) = k_t$. Соотношение между величинами b и k_t следует из того, что $\mathbf{Q}_z(0 0 1 1) = (0 0 k_t k_t)$, и в силу равенства (15.24) мы имеем $\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b = k_t$. Напомним (гл. 7, § 4, п. Д), что заданный в m -базисе вектор

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

в декартовом базисе имеет вид $(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/2^{1/2}$. Равенство (16.67) говорит нам, что $\mathbf{w}(\hat{\mathbf{k}})$ — это вектор длины k_t , пропорциональный вектору

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поворнутому с помощью преобразования \mathbf{R}_{xy} . Поскольку преобразование \mathbf{R}_{xy} переводит ось z в ось, направленную вдоль вектора \mathbf{k} , вектор $\mathbf{w}(\hat{\mathbf{k}})$ представляется в виде

$$\mathbf{w}(\hat{\mathbf{k}}) = k_t [\mathbf{e}_1(\hat{\mathbf{k}}) - i\mathbf{e}_2(\hat{\mathbf{k}})]/2^{1/2}, \quad (16.68)$$

где \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — ортогональные единичные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k} . Положение вектора \mathbf{e}_1 на этой плоскости не имеет значения, так как любой поворот в этой плоскости изменяет лишь фазовый

множитель вектора $w(\hat{k})$. Но, выбрав вектор e_2 в качестве оси вращения R_{xy} , можно добиться, чтобы наши единичные векторы обладали следующими простыми свойствами: $e_2(I\hat{k}) = e_2(\hat{k})$ и $e_1(I\hat{k}) = -e_1(\hat{k})$ (вектор $I\hat{k}$ получается в результате поворота R_{xy} на угол π). Тогда из формулы (16.68) следует, что $w(I\hat{k}) = -w^*(\hat{k})$.

Согласно формуле (15.91), операторы рождения частиц при пространственной инверсии преобразуются следующим образом:

$$T(I) a^\dagger(\hat{k}+) T^{-1}(I) = -[a^\dagger(I\hat{k}-)]. \quad (16.69)$$

Здесь выбран знак минус, но, вообще говоря, отношение фазовых множителей двух состояний с разными спиральностями может быть любым. [В равенстве (15.91) был взят знак плюс.] Но поскольку выбор сделан, теперь приобретает значение знак плюс перед операторами $a(\hat{k}-)$ и $a^\dagger(\hat{k}+)$ в выражении (16.65). С учетом равенства (16.69) убеждаемся в том, что поле удовлетворяет соотношению $T(I) \Phi(\hat{e}) T^{-1}(I) = \Phi^\dagger(I\hat{e})$. Следовательно, из полей Φ и Φ^\dagger можно образовать четную и нечетную относительно пространственной инверсии линейные комбинации: $\mathbf{B}(\hat{e}) = [\Phi(\hat{e}) + \Phi^\dagger(\hat{e})]/2^{1/2}$, $\mathbf{E}(\hat{e}) = -i[\Phi(\hat{e}) - \Phi^\dagger(\hat{e})]/2^{1/2}$. Здесь выбраны обычные числовые множители. Множитель i введен для того, чтобы оператор \mathbf{E} был эрмитов, так же как оператор \mathbf{B} . Используя символы \mathbf{E} и \mathbf{B} , мы предвидим связь этих операторов с электрическим и магнитным полями классической теории (§ 2, п. В). Для построения квантованного поля, соответствующего классическому векторному потенциалу $\hat{\mathbf{A}}$, введем удобные операторы рождения

$$\begin{aligned} a_1^\dagger(\hat{k}) &= [a^\dagger(\hat{k}+) - a^\dagger(\hat{k}-)]/2^{1/2}, \\ a_2^\dagger(\hat{k}) &= -i[a^\dagger(\hat{k}+) + a^\dagger(\hat{k}-)]/2^{1/2}. \end{aligned} \quad (16.70)$$

Это линейные комбинации двух состояний со спиральностями \pm . Они описывают состояния с плоской поляризацией. Подставляя выражение (16.68) для вектора w в равенство (16.65) и переходя к новым операторам, полу-

чаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\hat{\mathbf{e}}) = (2\pi)^{-3/2} 2^{-1/2} i \int dk \{ & [\mathbf{e}_1(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_1(\hat{\mathbf{k}}) + \\ & + \mathbf{e}_2(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_2(\hat{\mathbf{k}})] \exp(-i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) - \\ & - [\mathbf{e}_1(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_1^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) + \mathbf{e}_2(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_2^\dagger(\hat{\mathbf{k}})] \exp(i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}})\}, \quad (16.71)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\hat{\mathbf{e}}) = (2\pi)^{-3/2} 2^{-1/2} i \int dk \{ & [\mathbf{e}_2(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_1(\hat{\mathbf{k}}) - \\ & - \mathbf{e}_1(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_2(\hat{\mathbf{k}})] \exp(-i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) - \\ & - [\mathbf{e}_2(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_1^\dagger(\hat{\mathbf{k}}) - \mathbf{e}_1(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{a}_2^\dagger(\hat{\mathbf{k}})] \exp(i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}})\}\end{aligned}$$

Из вида формул (16.71) следует, что оба оператора \mathbf{E} и \mathbf{B} можно выразить через одно векторное поле

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{e}) = (2\pi)^{-3/2} 2^{-1/2} \int k_t^{-1} dk \sum_{\lambda=1,2} & \mathbf{e}(\hat{\mathbf{k}}, \lambda) \{ \mathbf{a}(\hat{\mathbf{k}}, \lambda) \exp(-i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) + \\ & + \mathbf{a}^\dagger(\hat{\mathbf{k}}, \lambda) \exp(i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \} \quad (16.72)\end{aligned}$$

следующим образом:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{e}}) = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\hat{\mathbf{e}}), \quad \mathbf{B}(\hat{\mathbf{e}}) = \text{rot } \mathbf{A}(\hat{\mathbf{e}}). \quad (16.73)$$

Здесь мы использовали простые свойства $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$ системы ортонормальных векторов с правой ориентацией.

Нетрудно убедиться, что, как и в других примерах, это поле удовлетворяет волновым уравнениям, выведенным в гл. 15, § 8, п. Е. Фактически приведенным там уравнениям удовлетворяет поле $\Phi^\dagger(\hat{\mathbf{e}})$, преобразующееся по представлению $L^{(1,0)}$, а для поля $\Phi(\hat{\mathbf{e}})$ нужно изменить знак в формуле (15.149). Итак,

$$\begin{aligned}\text{rot } \Phi(\hat{\mathbf{e}}) = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\hat{\mathbf{e}}), \quad \text{rot } \Phi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}) = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}), \\ \text{div } \Phi(\hat{\mathbf{e}}) = 0, \quad \text{div } \Phi^\dagger(\hat{\mathbf{e}}) = 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения, если их переписать с использованием напряженностей поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , преобразуются в известные уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (16.74)$$

Поэтому такое поле, состоящее из частиц нулевой массы $c|m|=1$ (фотонов), отождествляют с электромагнитным

полем, характеризуемым напряженностями **E** и **B**, в которое оно переходит в классическом пределе. Напряженности **E** и **B**, как и должно быть, получаются из одного поля **A** таким же путем, как и в классической теории (§ 1, п. В). Напомним, однако, что в классическом случае мы для описания инвариантности теории относительно преобразований Лоренца пользовались четырехмерным векторным потенциалом $\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}, \varphi)$ а в выражении (16.72) дается трехмерный вектор. В § 1, п. В мы показали, что любые два потенциала $\hat{\mathbf{A}}$, приводящие к одинаковым напряженностям **E** и **B**, с физической точки зрения эквивалентны. Значит, имеется некоторый произвол в выборе потенциала $\hat{\mathbf{A}}$. Один из возможных выборов (он называется «калибровкой излучения» или «кулоновской калибровкой») состоит в том, что полагают $\varphi = 0$. Выбор потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{e})$ в формуле (16.72) соответствует такой калибровке.

Мы построили поле $\mathbf{A}(\mathbf{e})$ довольно сложным путем, исходя из произведений представлений $P^{(0, 0)} \otimes L^{(1, 0)}$ и $P^{(0, 0)} \otimes L^{(0, 1)}$. Преимуществом такого пути была аналогия с построением поля нейтрино. Но можно было бы построить поле $\mathbf{E}(\mathbf{e})$ проще—на основании произведения представлений $P^{(0, 0)} \otimes L^{(1/2, 1/2)}$, которое также содержит представление $P^{(0, \pm 1)}$.

Наконец, отметим, что по построению напряженность **E** имеет положительную, а напряженность **B**—отрицательную внутреннюю четность. Поэтому из выражения (16.72) следует, что поле **A** должно иметь отрицательную внутреннюю четность: $T(l) \mathbf{A}(\mathbf{e}) T^{-1}(l) = -\mathbf{A}(le)$. Поэтому фотону приписывается отрицательная внутренняя четность. Если взять в операторах $a(\hat{k}-)$ и $a^\dagger(\hat{k}+)$, входящих в поле $\Phi_\alpha(\mathbf{e})$ [формула (16.65)], другие знаки, то получится поле с положительной внутренней четностью, но это противоречит экспериментальным данным для электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА¹⁾

Для дальнейшего чтения мы рекомендуем следующие книги по классической механике и теории поля:

¹⁾ Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе.—
Прим. ред.