17

ГРУППА ПЕРЕСТАНОВОК $\mathscr{S}_n$

Группа перестановок[1]) $\mathscr{S}_n$, которая состоит из всех перестановок n объектов, играет в теории симметрии любопытную роль. Можно достичь глубокого понимания симметрии, совершенно не зная свойств группы $\mathscr{S}_n$, но в то же время эта группа лежит в основании многих физических проблем. Группа перестановок связана с точечными группами гл. 9 так называемой теоремой Кэли, согласно которой любая точечная группа изоморфна некоторой группе перестановок, хотя и не обязательно группе всех перестановок $\mathscr{S}_n$. Например, в гл. 2 мы убедились, что изоморфны группы D_3 и $\mathscr{S}_3$. Группа перестановок также связана с группой вращений и унитарной группой. Неприводимые представления этих групп строят как произведения элементарных представлений. Затем исследуют поведение таких произведений при перестановках представлений. В гл. 18 мы разберем этот вопрос подробно. В физических приложениях соответственно статистике Бозе или Ферми полная волновая функция либо полностью симметрична, либо полностью антисимметрична (гл. 5, § 9). Но когда такая волновая функция состоит из отдельных волновых функций, описывающих координаты положения, переменные спина или другие степени свободы, поведение отдельных составляющих при перестановках может быть гораздо более сложным. Мы уже использовали группу перестановок $\mathscr{S}_3$ при описании атомной структуры в гл. 8, § 6, п. Г и при описании структуры ядер и элементарных частиц в гл. 12. Мы могли сделать это, не прибегая к подробному анализу, так как при малых числах n группа перестановок весьма проста. Кроме того, наша группа

---

[1]) Группу перестановок иногда называют симметрической группой и группой подстановок.— *Прим. перев.*

перестановок изоморфна группе D_3, которая подробно рассмотрена ранее в этой книге. В физических задачах при больших числах n группы перестановок применяются точно так же, как и группы перестановок при малых числах n. Поэтому в данной главе мы не будем рассматривать какие-либо новые приложения групп перестановок. Мы хотим лишь изложить общие свойства группы $\mathscr{S}_n$ и ее представлений.

Анализ группы $\mathscr{S}_n$ упрощается тем, что в отличие от точечных групп ее свойства можно исследовать при произвольном n, не рассматривая каждое значение n отдельно. Мы часто будем называть объекты перестановки частицами, так как в приложениях это типичная ситуация. В первых трех параграфах мы остановимся на некоторых свойствах самих перестановок. Параграфы 4—9 посвящены неприводимым представлениям и характерам группы $\mathscr{S}_n$. Там же введены схемы и таблицы Юнга, как удобный способ нумерации неприводимых представлений и базисных векторов. Вопрос о явном виде матрицы произвольного представления мы отложили до § 13. Продолжая начатое в § 10 обсуждение обычного прямого произведения, мы в § 11 введем понятие внешнего произведения, которое также пригодится в гл. 18. Основное внимание в данной главе будет уделено разъяснению сути дела, а не строгому изложению. Поэтому мы не доказываем все утверждения в общем случае любых чисел n. Мы не выводим общих формул для таких величин, как характеры, хотя и объясняем, как эти величины можно найти при любом заданном n.

§ 1. ЦИКЛЫ

Цикл — это перестановка особого вида. Она определяется следующим образом. Предположим, что целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_l$ расставлены по порядку с угловым интервалом $2\pi/l$ вдоль единичной окружности. Поворот на угол $2\pi/l$ (в обозначениях примера 10 гл. 2, § 2) приводит к перестановке

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{l-1} & p_l \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_l & p_1 \end{pmatrix}.$$

Такая перестановка называется циклом, длина которого равна l, и обозначается символом $(p_1 p_2 p_3 \ldots p_l)$.

Любую перестановку

$$\mathsf{P}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n\end{pmatrix}$$

можно представить в виде произведения циклов. Так, например, мы можем представить перестановку в виде $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 10 & 2 & 1 & 6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 8\\ 3 & 5 & 8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9 & 10\\ 10 & 6 & 9\end{pmatrix}=$ $=(1358)(6109)(27)(4)$, т. е. в виде произведения четырех циклов длиной 4, 3, 2 и 1. В случае произвольной перестановки P число 1 заменяется числом p_1, тогда как само число p_1, стоящее где-то в первой строке матрицы P, заменяется числом, стоящим ниже, допустим числом q_1. Точно так же число q_1 заменяется некоторым числом r_1. Следовательно, мы получаем последовательность чисел 1, p_1, q_1, r_1, ..., которая продолжается до тех пор, пока снова не появится число 1. Эта последовательность дает цикл $(1\ p_1\ q_1\ r_1 \ldots)$. Цикл может содержать все числа от 1 до n, но, вообще говоря, этого может и не быть. В таком случае выберем число, не входящее в цикл. Тем же способом, начиная с этого числа, строится новый цикл, у которого нет общих элементов с первым циклом. Таким образом перестановку P однозначно представляют в виде произведения циклов. Перестановки, соответствующие отдельным циклам, очевидно, коммутируют, так как нет чисел, принадлежащих одновременно любым двум циклам. Заметим, что если какое-либо число не меняется при перестановке P, то ему соответствует цикл длиной $l=1$, который состоит именно из этого числа. Сумма длин l_i циклов перестановки P должна быть равна числу n. Поэтому разбиение на циклы связано с разбиением $n=\sum_i l_i$ целого числа n на положительные целые числа l_i. Для определенности мы всегда расставляем циклы в порядке убывания длин, т. е. $l_i \geqslant l_{i+1}$. Мы будем использовать обозначение $[l_1 l_2 \ldots l_n]$. В приведенном выше примере при $n=10$ перестановке сопоставляется разбиение [4 3 2 1].

Цикл длиной $l=2$ называется «простой перестановкой» и обозначается символом P_{ij}. В частности, перестановка $\mathsf{P}_{i\ i+1}$ называется «смежной перестановкой».

Любой цикл и, следовательно, любую перестановку можно представить в виде произведения простых перестановок. В самом деле, нетрудно убедиться, что

$$(1\,2\,3\ldots k)\equiv\begin{pmatrix}1\,2\,3\ldots k-1\;k\\2\,3\,4\ldots\;\;k\;\;\;1\end{pmatrix}=\mathsf{P}_{12}\mathsf{P}_{23}\mathsf{P}_{34}\ldots\mathsf{P}_{k-1k}. \quad (17.1)$$

Любую простую перестановку можно путем последовательного применения соотношений типа $\mathsf{P}_{1k}=\mathsf{P}_{12}\mathsf{P}_{2k}\mathsf{P}_{12}$ представить в виде произведения смежных перестановок.

§ 2. ЧЕТНОСТЬ ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановке можно приписать «четность» $+1$ или -1 следующим образом: 1) цикл нечетной длины имеет положительную четность $+1$; 2) цикл четной длины имеет отрицательную четность -1; 3) четность перестановки равна произведению четностей всех ее циклов. Положительная четность ставится в соответствие нечетной длине цикла не из прихоти, такое сопоставление естественно, поскольку при этом цикл единичной длины, при котором ничто не переставляется, имеет положительную четность.

Существуют еще два эквивалентных определения четности перестановки. В первом из них каждый цикл представляют в виде произведения простых перестановок. Тогда цикл нечетной длины содержит четное число простых перестановок и наоборот. Значит, перестановка с положительной четностью содержит четное число простых перестановок, а перестановка с отрицательной четностью — нечетное. Во втором из эквивалентных определений берут функцию

$$\Phi_A=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}. \quad (17.2)$$

Это определитель, построенный из n разных функций φ_q совокупности n разных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Любая перестановка переменных приводит к определителю Φ_A с переставленными строками. Согласно теории определи-