Любой цикл и, следовательно, любую перестановку можно представить в виде произведения простых перестановок. В самом деле, нетрудно убедиться, что

$$(1\,2\,3\ldots k)\equiv\begin{pmatrix}1\,2\,3\ldots k-1\;k\\2\,3\,4\ldots\;\;k\;\;\;1\end{pmatrix}=\mathsf{P}_{12}\mathsf{P}_{23}\mathsf{P}_{34}\ldots\mathsf{P}_{k-1k}. \quad (17.1)$$

Любую простую перестановку можно путем последовательного применения соотношений типа $\mathsf{P}_{1k}=\mathsf{P}_{12}\mathsf{P}_{2k}\mathsf{P}_{12}$ представить в виде произведения смежных перестановок.

§ 2. ЧЕТНОСТЬ ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановке можно приписать «четность» $+1$ или -1 следующим образом: 1) цикл нечетной длины имеет положительную четность $+1$; 2) цикл четной длины имеет отрицательную четность -1; 3) четность перестановки равна произведению четностей всех ее циклов. Положительная четность ставится в соответствие нечетной длине цикла не из прихоти, такое сопоставление естественно, поскольку при этом цикл единичной длины, при котором ничто не переставляется, имеет положительную четность.

Существуют еще два эквивалентных определения четности перестановки. В первом из них каждый цикл представляют в виде произведения простых перестановок. Тогда цикл нечетной длины содержит четное число простых перестановок и наоборот. Значит, перестановка с положительной четностью содержит четное число простых перестановок, а перестановка с отрицательной четностью — нечетное. Во втором из эквивалентных определений берут функцию

$$\Phi_A=\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}. \quad (17.2)$$

Это определитель, построенный из n разных функций φ_q совокупности n разных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Любая перестановка переменных приводит к определителю Φ_A с переставленными строками. Согласно теории определи-

телей, это эквивалентно умножению определителя на $+1$ или -1 в зависимости от того, четное или нечетное число простых перестановок строк. Но такое число в точности совпадает с четностью перестановки, т. е.

$$\mathsf{P}\Phi_A = \pi(\mathsf{P})\Phi_A, \tag{17.3}$$

где через $\pi(\mathsf{P})$ мы обозначили четность перестановки P. Величина $\pi(\mathsf{P})$ может принимать лишь значения ± 1. Таким образом, четность $\pi(\mathsf{P})$ определяется как результат действия перестановки P на определитель Φ_A.

§ 3. КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В гл. 2, § 7 мы показали для групп вращений, что если два вращения R и R' лежат в одном классе сопряженных элементов, то группа должна содержать вращение, переводящее ось вращения R в ось вращения R'. Для группы перестановок аналогичный результат формулируется так: если две перестановки P и P' лежат в одном классе сопряженных элементов группы $\mathscr{S}_n$, то должна существовать перестановка Q, которая при действии на обе строки перестановки P дает перестановку P'. Для доказательства этого утверждения определим сначала перестановки

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \tag{17.4}$$

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}. \tag{17.5}$$

Последнее тождество позволяет найти числа r_i, если известны числа p_i и q_i. Далее,

$$\mathsf{QPQ}^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \dots & p_n \\ r_1 & r_2 \dots & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & n \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \dots & q_n \\ 1 & 2 \dots & n \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \dots & q_n \\ r_1 & r_2 \dots & r_n \end{pmatrix} = \mathsf{P}'. \tag{17.6}$$

Но перестановка P' — это как раз перестановка P [формула (17.4)], у которой числа обеих строк переставлены согласно перестановке Q, заданной формулой (17.5), т. е.