

ными. В данном примере классы сопряженных элементов \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , и \mathcal{C}_3 упорядочены в соответствии с примерами гл. 2, § 7, п. Б и В. Более логично было бы упорядочивать классы сопряженных элементов по наибольшим длинам цикла, начиная с тех классов, у которых наибольшая длина цикла минимальна. Классы сопряженных элементов, у которых длина наибольших циклов одинакова, можно упорядочивать по длине следующего наибольшего цикла и т. д.

§ 4. ТРИВИАЛЬНОЕ И АНТИСИММЕТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СИММЕТРИЧНЫЕ И АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Оставшаяся часть данной главы посвящена в основном неприводимым представлениям группы \mathcal{S}_n . Завершением всего будет построение матриц $T(P)$ в § 13. В данном же параграфе мы ограничимся рассмотрением двух простых одномерных представлений. Они строятся для любого n . Во-первых, у группы перестановок, как и любой группы, есть тривиальное одномерное представление, которое каждому элементу группы сопоставляет число $+1$. Следовательно, функция Φ_S , преобразующаяся по этому представлению, не меняется при любой перестановке. Ее обычно называют полностью симметричной функцией. Итак, при любой перестановке P

$$P\Phi_S = \Phi_S. \quad (17.9)$$

При произвольном n существует и другое одномерное представление, называемое антисимметричным. Оно каждому элементу P сопоставляет четность $\pi(P) = \pm 1$. Это есть представление группы перестановок, поскольку четность произведения перестановок равна произведению четностей перестановок. В самом деле, посмотрим, как произведение $R = QP$ действует на функцию Φ_A [формула (17.2)]: $R\Phi_A = QP\Phi_A = Q\pi(P)\Phi_A = \pi(Q)\pi(P)\Phi_A$. Отсюда получаем, что, действительно, $\pi(R) = \pi(Q)\pi(P)$. Функция Φ_A — это удобная базисная функция антисимметричного представления

$$P\Phi_A = \pi(P)\Phi_A. \quad (17.10)$$

Функция типа функции Φ_A , которая преобразуется по антисимметричному представлению, называется полностью антисимметричной. В частности, она обладает свойством

$$\mathbf{P}_{ij}\Phi_A = -\Phi_A \quad (17.11)$$

при любых простых перестановках \mathbf{P}_{ij} .

В гл. 4, § 19 мы построили проекционный оператор, который, действуя на произвольную функцию, дает функцию с определенным типом симметрии. Проекционные операторы для двух одномерных представлений, рассмотренных выше, таковы:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{n!} \sum_{\mathbf{P}} \mathbf{P}, \\ A &= \frac{1}{n!} \sum_{\mathbf{P}} \pi_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}) \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Численный множитель $1/n!$ в большинстве случаев не имеет значения. Первый из этих двух операторов называется симметризатором, а второй — антисимметризатором. Какова бы ни была функция f , функция $f_S = Sf$ будет, согласно общей теории гл. 4, § 19, полностью симметричной, а функция $f_A = Af$ — полностью антисимметричной. Правда, для некоторых функций f функции f_S и f_A могут тождественно равняться нулю.

Рассмотрим, например, случай, когда $n=2$ и $f=x_1$. Имеем

$$Sf = \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{P}_{12}) x_1 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) = f_S,$$

$$Af = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{P}_{12}) x_1 = \frac{1}{2} (x_1 - x_2) = f_A.$$

Заметим, что здесь $\mathbf{E} = S + A$, т. е. $f = f_S + f_A$. Значит, любую функцию двух переменных можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной составляющих.

В качестве второго примера возьмем $n=3$ и снова

будем проектировать функцию $f = x_1$. Тогда

$$\begin{aligned} Sf &= \frac{1}{6} \left[E + P_{12} + P_{13} + P_{23} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] x_1 = \\ &= \frac{1}{6} (x_1 + x_2 + x_3 + x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) = f_S, \\ Af &= \frac{1}{6} \left[E - P_{12} - P_{13} - P_{23} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] x_1 = \\ &= \frac{1}{6} (x_1 - x_2 - x_3 - x_1 + x_2 + x_3) = 0. \end{aligned}$$

Значит, функция $f = x_1$ слишком проста для того, чтобы получить полностью антисимметричную функцию. Она не содержит полностью антисимметричной составляющей, которую можно было бы спроектировать. Видно также, что при $n > 2$ нельзя написать $E = S + A$. Поэтому для разложения произвольной функции при $n > 2$ необходимо в дополнение к операторам S и A ввести другие операторы симметризации. Иначе говоря, при $n > 2$ тривиальное и антисимметричное представления не исчерпывают всех возможных неприводимых представлений.

§ 5. ТАБЛИЦА ХАРАКТЕРОВ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В § 3 мы показали, что при любом числе n классы сопряженных элементов группы перестановок определяются разбиениями числа n . В силу общего результата гл. 4, § 13 число неприводимых представлений группы совпадает с числом классов сопряженных элементов. Поэтому число неприводимых представлений группы \mathcal{S}_n равно числу разбиений $[n_1 n_2 \dots]$ числа n . При $n = 2$ существуют два неприводимых представления, соответствующих разбиениям [2] и [11], при $n = 3$ существуют три неприводимых представления, соответствующих разбиениям [3], [21] и [111], а при $n = 4$ существуют пять неприводимых представлений.

В гл. 4, § 10 мы уже приводили таблицу характеров группы \mathcal{S}_3 . Вернее, мы приводили таблицу характеров