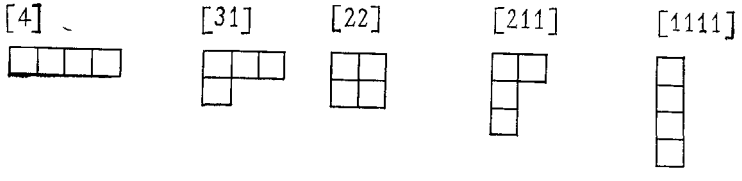
каждый из вычисленных ранее характеров входит в разложение, и показать, что оставшийся характер неприводим. Оставшийся характер обозначим символом $\chi^{[n_1 n_2 \ldots]}$. Таким образом, каждому разбиению мы сопоставили неприводимый характер. Результаты такого анализа характеров при $n \leqslant 4$ отражены в табл. 17.1. Интересно, что $\psi^{[111\ldots]}$ — это характер регулярного представления (гл. 4, § 13), которое содержит каждое неприводимое представление с кратностью, равной размерности данного представления. Продвижение вниз таблицы соответствует введению все большего числа базисных функций φ_q в выражении (17.13) и, следовательно, большему простору для антисимметрии. Наконец, в последней строке число функций φ_q совпадает с числом частиц, и можно построить любой тип симметрии, включая полностью антисимметричное представление $\chi^{[111\ldots]}$, о котором говорилось в § 4.

§ 6. СХЕМЫ ЮНГА

Хотя мы и не приводили полного доказательства, в § 5 мы показали, что неприводимые представления группы $\mathscr{S}_n$ соответствуют разбиениям $[n_1 n_2 \ldots]$ числа n. Для разбиений часто оказывается более удобным следующее наглядное обозначение. Для каждого разбиения строится схема из n квадратиков, n_1 из которых находятся в первой строке, n_2 — во второй строке и т. д. Левые концы всех строк лежат на одной вертикальной прямой. Такая схема носит имя математика А. Юнга. Ниже в качестве примера приведены схемы Юнга, соответствующие пяти разбиениям числа $n = 4$:



Далее, согласно результатам § 5, каждому неприводимому представлению группы $\mathscr{S}_n$ сопоставляется схема Юнга, составленная из n квадратов. Хотя на первый взгляд такое обозначение может показаться не очень компактным,

в § 8 мы убедимся в том, что с его помощью можно характеризовать не только неприводимые представления группы $\mathcal{S}_n$, но и базисные векторы представлений.

§ 7. ОГРАНИЧЕНИЕ СГРУППЫ $\mathcal{S}_n$ НА ПОДГРУППУ $\mathcal{S}_{n-1}$

Рассмотрим группу $\mathcal{S}_{n-1}$ перестановок объектов 1, 2, ... , $n-1$, которые оставляют объект n на месте. Очевидно, что это подгруппа группы $\mathcal{S}_n$. Поэтому любое неприводимое представление группы $\mathcal{S}_n$ будет представлением группы $\mathcal{S}_{n-1}$, хотя и не обязательно неприводимым по отношению к группе $\mathcal{S}_{n-1}$. Следовательно, возникает вопрос, какие неприводимые представления группы $\mathcal{S}_{n-1}$ будут входить в разложение неприводимого представления группы $\mathcal{S}_n$. Ответ на этот вопрос дается таблицей характеров.

Обозначим $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ неприводимое представление группы $\mathcal{S}_n$, соответствующее разбиению α_n числа n. Тогда ограничение этого представления на подгруппу $\mathcal{S}_{n-1}$ имеет вид

$$\mathsf{T}^{(\alpha_n)} = \sum_{\alpha_{n-1}} m(\alpha_{n-1})\, \mathsf{T}^{(\alpha_{n-1})}, \tag{17.16}$$

где $\mathsf{T}^{(\alpha_{n-1})}$ — неприводимое представление группы $\mathcal{S}_{n-1}$, а суммирование распространяется на все разбиения α_{n-1} числа $n-1$.

Характер представления $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ для элементов подгруппы $\mathcal{S}_{n-1}$ определяется таблицей характеров группы $\mathcal{S}_n$. Нужно только выбирать лишь те классы сопряженных элементов, у которых есть хотя бы один цикл единичной длины. Коэффициенты $m(\alpha_{n-1})$ можно вычислить по формуле (4.28) на основании полной таблицы характеров группы $\mathcal{S}_{n-1}$.

Рассмотрим, например, случай $n=4$. Классами сопряженных элементов группы $\mathcal{S}_4$, которые содержат элементы группы $\mathcal{S}_3$, будут (1111), (211) и (31). Они содержат, соответственно, элементы из следующих классов сопряженных элементов группы $\mathcal{S}_3$: (111), (21) и (3). В табл. 17.2 приведены характеры представлений $\mathsf{T}^{(\alpha_4)}$ и $\mathsf{T}^{(\alpha_3)}$, взятые из табл. 17.1. Разложение характеров приведено справа. Мы видим, что числа $m(\alpha_3)$ равны либо нулю, либо единице.