в § 8 мы убедимся в том, что с его помощью можно характеризовать не только неприводимые представления группы $\mathcal{S}_n$, но и базисные векторы представлений.

§ 7. ОГРАНИЧЕНИЕ СГРУППЫ $\mathcal{S}_n$ НА ПОДГРУППУ $\mathcal{S}_{n-1}$

Рассмотрим группу $\mathcal{S}_{n-1}$ перестановок объектов 1, 2, ... , $n-1$, которые оставляют объект n на месте. Очевидно, что это подгруппа группы $\mathcal{S}_n$. Поэтому любое неприводимое представление группы $\mathcal{S}_n$ будет представлением группы $\mathcal{S}_{n-1}$, хотя и не обязательно неприводимым по отношению к группе $\mathcal{S}_{n-1}$. Следовательно, возникает вопрос, какие неприводимые представления группы $\mathcal{S}_{n-1}$ будут входить в разложение неприводимого представления группы $\mathcal{S}_n$. Ответ на этот вопрос дается таблицей характеров.

Обозначим $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ неприводимое представление группы $\mathcal{S}_n$, соответствующее разбиению α_n числа n. Тогда ограничение этого представления на подгруппу $\mathcal{S}_{n-1}$ имеет вид

$$\mathsf{T}^{(\alpha_n)} = \sum_{\alpha_{n-1}} m(\alpha_{n-1})\, \mathsf{T}^{(\alpha_{n-1})}, \tag{17.16}$$

где $\mathsf{T}^{(\alpha_{n-1})}$ — неприводимое представление группы $\mathcal{S}_{n-1}$, а суммирование распространяется на все разбиения α_{n-1} числа $n-1$.

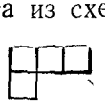
Характер представления $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ для элементов подгруппы $\mathcal{S}_{n-1}$ определяется таблицей характеров группы $\mathcal{S}_n$. Нужно только выбирать лишь те классы сопряженных элементов, у которых есть хотя бы один цикл единичной длины. Коэффициенты $m(\alpha_{n-1})$ можно вычислить по формуле (4.28) на основании полной таблицы характеров группы $\mathcal{S}_{n-1}$.

Рассмотрим, например, случай $n=4$. Классами сопряженных элементов группы $\mathcal{S}_4$, которые содержат элементы группы $\mathcal{S}_3$, будут (1111), (211) и (31). Они содержат, соответственно, элементы из следующих классов сопряженных элементов группы $\mathcal{S}_3$: (111), (21) и (3). В табл. 17.2 приведены характеры представлений $\mathsf{T}^{(\alpha_4)}$ и $\mathsf{T}^{(\alpha_3)}$, взятые из табл. 17.1. Разложение характеров приведено справа. Мы видим, что числа $m(\alpha_3)$ равны либо нулю, либо единице.

Таблица 17.2

	(111)	(21)	(3)	
$\chi^{[3]}$	1	1	1	
$\chi^{[21]}$	2	0	-1	
$\chi^{[111]}$	1	-1	1	
$\chi^{[4]}$	1	1	1	$\chi^{[3]}$
$\chi^{[31]}$	3	1	0	$\chi^{[3]}+\chi^{[21]}$
$\chi^{[22]}$	2	0	-1	$\chi^{[21]}$
$\chi^{[211]}$	3	-1	0	$\chi^{[21]}+\chi^{[111]}$
$\chi^{[111]}$	1	-1	1	$\chi^{[111]}$

Можно показать, что в формуле (17.16) коэффициенты $m(\alpha_{n-1})$ всегда равны либо нулю, либо единице. Существует простое правило, позволяющее определять, какие именно коэффициенты $m(\alpha_{n-1})$ равны единице: схемы Юнга α_{n-1}, для которых $m(\alpha_{n-1})=1$, получаются путем удаления одного квадрата из схемы Юнга α_n. Например, при удалении одного квадрата из схемы Юнга



получаются схемы

 и  , но не схема  .

§ 8. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Базисные векторы неприводимого представления $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ группы $\mathscr{S}_n$ можно нумеровать соответственно их поведению при последовательных ограничениях на подгруппы $\mathscr{S}_n \to \mathscr{S}_{n-1} \to \mathscr{S}_{n-2} \to \ldots \to \mathscr{S}_2$. На каждом шаге мы рассматриваем разложение (17.16). Цепочка подгрупп получается путем удаления сначала объекта n, затем объекта $n-1$, и так до тех пор, пока не останутся лишь объекты 2 и 1, на которые действует группа $\mathscr{S}_2$. Каждому век-