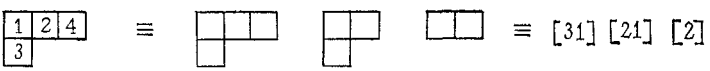
В табл. 17.3 приведены таблицы Юнга для всех неприводимых представлений групп $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}_3$, $\mathscr{S}_4$. Например, для представления [31] группы $\mathscr{S}_4$ возможны три таблицы Юнга, соответствующие трем базисным векторам. Это соответствует размерности неприводимого представления, приведенной в табл. 17.1. Эквивалентность громоздких обозначений $\alpha_4\alpha_3\alpha_2$ и таблиц Юнга можно продемонстрировать на примере:



Яманучи предложил еще более удобное для печати обозначение. Вместо таблиц Юнга он ввел символ Яманучи $(r_n r_{n-1} \ldots r_1)$, в котором r_k — номер строки, где находится число k. Для приведенного выше примера символ Яманучи—это (1211). Таким символом полностью определяется таблица Юнга. В самом деле, начиная с числа r_1, нужно двигаться влево, помня, что в таблице Юнга числа должны возрастать в направлении слева направо и сверху вниз. При этом всегда $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ или 2 и т. д. Одним из преимуществ обозначения Яманучи является то, что, убирая число r_n, мы получаем символ Яманучи, определяющий поведение базисного вектора представления $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ при ограничении представления на подгруппу $\mathscr{S}_{n-1}$. Последовательно отбрасывая числа $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_3$, получаем символы Яманучи, характеризующие поведение базисного вектора при последовательных ограничениях представления на подгруппы $\mathscr{S}_{n-2}$, $\mathscr{S}_{n-3}, \ldots, \mathscr{S}_2$.

§ 9. ПРИМЕРЫ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В предыдущем параграфе мы ввели систему нумерации базисных векторов неприводимого представления. Это очень стройная, но довольно формальная система. Теперь мы на основании функций (17.13) построим несколько конкретных примеров базисных векторов при малых n, что позволит нам записать матрицы представлений в явном виде. Элегантные общие правила для написания таких матриц будут приведены позже (§ 13).

При любом n одномерные представления $[n]$ и $[111\ldots]$ соответствуют полностью симметричному и полностью антисимметричному представлениям (§ 4). Если начать с малых n, то первое представление, отличное от этих представлений, соответствует разбиению $[21]$ числа $n=3$, а соответствующая функция (17.13) равна

$$\Phi([21])=\varphi_1(1)\,\varphi_1(2)\,\varphi_2(3). \qquad (17.17)$$

Упростим обозначения и положим $\Phi([21])=|112\rangle$, где $|ijk\rangle$ — краткая запись функции $\varphi_i(1)\,\varphi_j(2)\,\varphi_k(3)$. В обозначениях § 5 пространство $L\,[21]$ — это пространство, порождаемое перестановками аргументов функции $\Phi([21])$. Пространство $L[21]$ трехмерно. Его базисными векторами будут функции $|112\rangle$, $|121\rangle$ и $|211\rangle$. Из табл. 17.1 следует, что представление, действующее в пространстве $L[21]$, разлагается на два неприводимых представления $\mathsf{T}^{[3]}$ и $\mathsf{T}^{[21]}$. Полностью симметричный вектор имеет вид

$$\theta([3])=\{|112\rangle+|121\rangle+|211\rangle\}/\sqrt{3}, \qquad (17.18)$$

где $\sqrt{3}$ — нормировочный множитель. Представление $\mathsf{T}^{[21]}$ порождается ортогональным дополнением, т. е. двумерным пространством векторов, ортогональных вектору (17.18). Естественно, в выборе пары базисных векторов этого пространства имеется некоторый произвол. Если мы выберем два вектора

$$\begin{aligned}\theta([21]\,a)&=\{2\,|112\rangle-|121\rangle-|211\rangle\}/\sqrt{6},\\ \theta([21]\,b)&=\{|121\rangle-|211\rangle\}/\sqrt{2},\end{aligned} \qquad (17.19)$$

то очевидно, что они не только ортогональны вектору (17.18) и друг другу, но и принадлежат неприводимым представлениям подгруппы $\mathscr{S}_2$, действующей на частицы 1 и 2. Вектор $\theta([21]\,a)$ симметричен по отношению к перестановке P_{12}, а вектор $\theta([21]\,b)$ антисимметричен. Поэтому они соответствуют таблицам Юнга

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}\ \text{и}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

В таком базисе представления $\mathsf{T}^{[21]}$ матрица перестановки P_{12} имеет вид $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Производя перестановки в формулах (17.19), например, $\mathsf{P}_{23}\theta([21]\,a)=\{2\,|121\rangle-$

$-|112\rangle-|211\rangle\}/\sqrt{6}=-{}^1/_2\theta([12]a)+\sqrt{{}^3/_4}\,\theta([21]b)$, находим матрицу перестановки P_{23}: $\mathsf{P}_{23}=\begin{pmatrix}-{}^1/_2 & \sqrt{{}^3/_4}\\ \sqrt{{}^3/_4} & {}^1/_2\end{pmatrix}$. В § 1 мы доказали, что любую перестановку можно представить в виде произведения простых смежных перестановок. Поэтому, зная правила умножения элементов группы, все матрицы представления $\mathsf{T}^{[21]}$ можно выразить через известные матрицы P_{12} и P_{23}. Так, например, $\mathsf{P}_{13}=\mathsf{P}_{12}\mathsf{P}_{23}\mathsf{P}_{12}$ и матрица перестановки P_{13} равна произведению матриц:

$$\mathsf{P}_{13}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-{}^1/_2 & \sqrt{{}^3/_4}\\ \sqrt{{}^3/_4} & {}^1/_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-{}^1/_2 & -\sqrt{{}^3/_4}\\ -\sqrt{{}^3/_4} & {}^1/_2\end{pmatrix}.$$

Подобное упражнение при $n=4$ мы предлагаем в качестве задачи 17.5. В § 13 мы приведем простые правила написания матриц простых смежных перестановок в любом неприводимом представлении. Правда, вывод этих правил довольно сложен.

Отметим, что в силу изоморфизма между группой $\mathscr{S}_3$ и точечной группой D_3 (гл. 2, § 3) приведенные выше матрицы совпадают с матрицами из табл. 4.1, отличаясь от них лишь порядком базисных векторов.

§ 10. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Из любых двух представлений $\mathsf{T}^{(\alpha_1)}$ и $\mathsf{T}^{(\alpha_2)}$ мы можем построить представление, равное прямому произведению представлений $\mathsf{T}^{(\alpha_1)}\otimes\mathsf{T}^{(\alpha_2)}$. Его размерность равна произведению размерностей представлений $\mathsf{T}^{(\alpha_1)}$ и $\mathsf{T}^{(\alpha_2)}$. В общем случае это понятие определено в гл. 4, § 17. Конечно, такое определение применимо и к группе $\mathscr{S}_n$. Разложение произведения представлений в сумму неприводимых представлений мы рассматривали на основании таблицы характеров [формула (4.45)]. Так, например, табл. 17.1 дает нам: $\mathsf{T}^{[21]}\otimes\mathsf{T}^{[21]}=\mathsf{T}^{[3]}\oplus\mathsf{T}^{[21]}\oplus\mathsf{T}^{[111]}$.

Имеются два важных примера таких произведений. Рассмотрим сначала произведение $\mathsf{T}^{(\alpha)}\otimes\mathsf{T}^{[111\ldots]}$ любого неприводимого представления на полностью антисимметричное представление. Так как представление $\mathsf{T}^{[111\ldots]}$ одномерно, произведение представлений имеет ту же размерность, что и представление $\mathsf{T}^{(\alpha)}$. Более того, если $\chi_p^{(\alpha)}$ — характер представления $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ на перестановке из класса $\mathscr{C}_p$