

$-|112\rangle - |211\rangle\} / \sqrt{6} = -\frac{1}{2}\theta([12]a) + \sqrt{\frac{3}{4}}\theta([21]b)$ , находим матрицу перестановки  $P_{23}$ :  $P_{23} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . В § 1 мы

доказали, что любую перестановку можно представить в виде произведения простых смежных перестановок. Поэтому, зная правила умножения элементов группы, все матрицы представления  $T^{[21]}$  можно выразить через известные матрицы  $P_{12}$  и  $P_{23}$ . Так, например,  $P_{13} = P_{12}P_{23}P_{12}$  и матрица перестановки  $P_{13}$  равна произведению матриц:

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Подобное упражнение при  $n=4$  мы предлагаем в качестве задачи 17.5. В § 13 мы приведем простые правила написания матриц простых смежных перестановок в любом не-приводимом представлении. Правда, вывод этих правил довольно сложен.

Отметим, что в силу изоморфизма между группой  $\mathcal{S}_3$  и точечной группой  $D_3$  (гл. 2, § 3) приведенные выше матрицы совпадают с матрицами из табл. 4.1, отличаясь от них лишь порядком базисных векторов.

## § 10. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Из любых двух представлений  $T^{(\alpha_1)}$  и  $T^{(\alpha_2)}$  мы можем построить представление, равное прямому произведению представлений  $T^{(\alpha_1)} \otimes T^{(\alpha_2)}$ . Его размерность равна произведению размерностей представлений  $T^{(\alpha_1)}$  и  $T^{(\alpha_2)}$ . В общем случае это понятие определено в гл. 4, § 17. Конечно, такое определение применимо и к группе  $\mathcal{S}_n$ . Разложение произведения представлений в сумму неприводимых представлений мы рассматривали на основании таблицы характеров [формула (4.45)]. Так, например, табл. 17.1 дает нам:  $T^{[21]} \otimes T^{[21]} = T^{[3]} \oplus T^{[111]} \oplus T^{[1111]}$ .

Имеются два важных примера таких произведений. Рассмотрим сначала произведение  $T^{(\alpha)} \otimes T^{[111\dots]}$  любого неприводимого представления на полностью антисимметричное представление. Так как представление  $T^{[111\dots]}$  одномерно, произведение представлений имеет ту же размерность, что и представление  $T^{(\alpha)}$ . Более того, если  $\chi_p^{(\alpha)}$  — характер представления  $T^{(\alpha)}$  на перестановке из класса  $\mathcal{C}_p$ ,

сопряженных элементов группы, то характер произведения представлений на этой перестановке равен просто  $\pi_p \chi_p^{(\alpha)}$ , где  $\pi_p$  — четность элементов из класса  $\mathcal{C}_p$ . Здесь мы воспользовались тем, что, согласно формуле (17.10), четность  $\pi_p$  есть характер представления  $T^{[111\dots]}$ . В силу критерия (4.29) из неприводимости представления  $T^{(\alpha)}$  следует неприводимость произведения представлений, так как  $\pi_p^2 = 1$ . Значит,

$$T^{(\alpha)} \otimes T^{[111\dots]} = T^{(\tilde{\alpha})}, \quad \chi_p^{(\tilde{\alpha})} = \pi_p \chi_p^{(\alpha)}, \quad (17.20)$$

где  $\tilde{\alpha}$  — индекс другого неприводимого представления группы  $\mathcal{S}_n$ . Например, если  $\alpha = [n]$ , то  $\tilde{\alpha} = [111\dots]$ , т. е. два представления  $T^{(\alpha)}$  и  $T^{(\tilde{\alpha})}$  получаются одно из другого путем замены в схеме Юнга строк на столбцы. Присматривая табл. 17.1, мы приходим к тому же выводу, например, при  $\alpha = [31]$  и  $\tilde{\alpha} = [211]$ . Можно доказать, что и в общем случае схемы Юнга  $\alpha$  и  $\tilde{\alpha}$  получаются одна из другой путем замены строк на столбцы, иначе говоря, путем отражения относительно диагонали, выходящей из левого верхнего угла схемы под углом  $45^\circ$ . Представление  $T^{(\tilde{\alpha})}$  называется сопряженным или ассоциированным представлением представления  $T^{(\alpha)}$ . Некоторые представления, такие, как  $T^{[21]}$  и  $T^{[121]}$ , называются самосопряженными. Характер самосопряженного представления должен быть равен нулю на классах сопряженных элементов с отрицательной четностью. Это легко проверить по табл. 17.1.

Рассмотрим теперь разложение

$$T^{(\alpha)} \otimes T^{(\beta)} = \sum_{\gamma} m_{\gamma} T^{(\gamma)} \quad (17.21)$$

произведения двух неприводимых представлений. Вычислим два довольно специальных коэффициента  $m_{\gamma}$ , а именно коэффициенты  $m_{[n]}$  и  $m_{[111\dots]}$ . Подставляя известные характеры 1 и  $\pi_p$  представлений  $T^{[n]}$  и  $T^{[111\dots]}$  в общую формулу (4.45) и применяя соотношения (17.20), получаем

$$\begin{aligned} m_{[n]} &= (n!)^{-1} \sum_p c_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)}, \\ m_{[111\dots]} &= (n!)^{-1} \sum_p c_p \pi_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)} = (n!)^{-1} \sum_p c_p \chi_p^{(\tilde{\alpha})} \chi_p^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (17.22)$$

Наконец, с учетом соотношения ортогональности характеров [формула (4.25б)] и действительности характеров группы  $\mathcal{S}_n$  выражения (17.22) можно привести к виду

$$m_{[n]} = \delta_{\alpha, \beta}, \quad m_{[111\dots]} = \delta_{\tilde{\alpha}, \beta}. \quad (17.23)$$

Смысл этого результата состоит в том, что полностью симметричное представление входит лишь в произведение двух одинаковых или по крайней мере эквивалентных (гл. 4, § 6) неприводимых представлений. Точно так же полностью антисимметричное представление входит лишь в произведения представлений и их сопряженных. Последний результат мы уже использовали при построении антисимметричных волновых функций в задачах атомной и ядерной физики (гл. 8, § 6, п. Г; гл. 12). Например, в гл. 8 при описании атомной структуры орбитальное состояние с симметрией  $\alpha$  должно было объединяться со спиновым состоянием с симметрией  $\tilde{\alpha}$ . Кроме того, схемы Юнга  $\tilde{\alpha}$  могут содержать не более двух строк, так как спин электрона  $s$  равен  $1/2$  и для электрона возможны лишь два спиновых состояния. Поэтому схемы Юнга  $\alpha$  для орбитальной части должны содержать не более двух столбцов. Связь между полным спином  $S$  и схемой Юнга  $\tilde{\alpha}$  рассматривается в гл. 18, § 10. В результате получается соотношение  $S = 1/2 (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2)$ , где  $\tilde{n}_1$  и  $\tilde{n}_2$  — длины двух строк схемы  $\tilde{\alpha}$ .

Чтобы действительно получить такие полностью симметричные или антисимметричные функции из произведений векторов, нужно, конечно, следя общей методике гл. 4, § 17, просуммировать произведения различных базисных векторов двух представлений с соответствующими коэффициентами Клебша—Гордана. Эти коэффициенты легко вычисляются (задача 17.6).

## § 11. ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этом и следующих параграфах мы рассмотрим новое произведение двух представлений, называемое внешним произведением. Из представления  $T^{(\alpha)}$  группы  $\mathcal{S}_n$  и представления  $T^{(\alpha')}$  группы  $\mathcal{S}_{n'}$  мы образуем представление  $T$  группы  $\mathcal{S}_{n+n'}$ . В физике такие произведения нужны для