

Наконец, с учетом соотношения ортогональности характеров [формула (4.25б)] и действительности характеров группы \mathcal{S}_n выражения (17.22) можно привести к виду

$$m_{[n]} = \delta_{\alpha, \beta}, \quad m_{[111\dots]} = \delta_{\tilde{\alpha}, \beta}. \quad (17.23)$$

Смысл этого результата состоит в том, что полностью симметричное представление входит лишь в произведение двух одинаковых или по крайней мере эквивалентных (гл. 4, § 6) неприводимых представлений. Точно так же полностью антисимметричное представление входит лишь в произведения представлений и их сопряженных. Последний результат мы уже использовали при построении антисимметричных волновых функций в задачах атомной и ядерной физики (гл. 8, § 6, п. Г; гл. 12). Например, в гл. 8 при описании атомной структуры орбитальное состояние с симметрией α должно было объединяться со спиновым состоянием с симметрией $\tilde{\alpha}$. Кроме того, схемы Юнга $\tilde{\alpha}$ могут содержать не более двух строк, так как спин электрона s равен $1/2$ и для электрона возможны лишь два спиновых состояния. Поэтому схемы Юнга α для орбитальной части должны содержать не более двух столбцов. Связь между полным спином S и схемой Юнга $\tilde{\alpha}$ рассматривается в гл. 18, § 10. В результате получается соотношение $S = 1/2 (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2)$, где \tilde{n}_1 и \tilde{n}_2 — длины двух строк схемы $\tilde{\alpha}$.

Чтобы действительно получить такие полностью симметричные или антисимметричные функции из произведений векторов, нужно, конечно, следя общей методике гл. 4, § 17, просуммировать произведения различных базисных векторов двух представлений с соответствующими коэффициентами Клебша—Гордана. Эти коэффициенты легко вычисляются (задача 17.6).

§ 11. ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этом и следующих параграфах мы рассмотрим новое произведение двух представлений, называемое внешним произведением. Из представления $T^{(\alpha)}$ группы \mathcal{S}_n и представления $T^{(\alpha')}$ группы $\mathcal{S}_{n'}$ мы образуем представление T группы $\mathcal{S}_{n+n'}$. В физике такие произведения нужны для

построения волновых функций системы из $n + n'$ частиц на основании волновых функций систем из n и n' частиц, но мы не будем приводить примеров. С математической точки зрения интересна связь между внешним произведением представлений групп перестановок и обычным произведением представлений унитарных групп. Этот вопрос рассматривается в гл. 18.

Рассмотрим произведения вида

$$f_i(1, 2, \dots, n) g_j(n+1, n+2, \dots, n+n'), \quad (17.24)$$

где функции f_i преобразуются по некоторому неприводимому представлению $T^{(\alpha)}$ группы \mathcal{S}_n , действующей на частицы $1, \dots, n$, а функции g_j —по некоторому представлению $T^{(\alpha')}$ группы $\mathcal{S}_{n'}$, действующей на частицы $n+1, \dots, n+n'$. Множество произведений (17.24), где функции f_i пробегают все семейство s_α базисных векторов представления $T^{(\alpha)}$, а функции g_j —все семейство $s_{\alpha'}$ базисных векторов представления $T^{(\alpha')}$, не образует пространства, инвариантного относительно группы $\mathcal{S}_{n+n'}$. Если же разрешить всевозможные перестановки между частицами в функциях f и в функциях g , то такое расширенное пространство будет инвариантным. Поскольку существует $(n+n')!/n!n'!$ способов выбора n частиц из $(n+n')$ частиц, размерность расширенного пространства равна

$$s_\alpha s_{\alpha'} (n+n')!/n!n'!. \quad (17.25)$$

В расширенном пространстве действует представление T группы $\mathcal{S}_{n+n'}$, которое, вообще говоря, не является неприводимым. Представление T группы $\mathcal{S}_{n+n'}$ называется «внешним произведением» представления $T^{(\alpha)}$ группы \mathcal{S}_n на представление $T^{(\alpha')}$ группы $\mathcal{S}_{n'}$. Оно обозначается символом $T = T^{(\alpha)} \otimes T^{(\alpha')}$. Мы столкнулись с интересной задачей: по заданным неприводимым представлениям с индексами α и α' , которые равны разбиениям n и n' частиц, нужно найти все возможные неприводимые представления группы $\mathcal{S}_{n+n'}$, входящие в разложение представления T . Рассмотрим сначала несколько простых примеров.

Если $n = n' = 1$, то размерность представления T равна двум. Базисными векторами представления будут функции $f(1)g(2)$ и $f(2)g(1)$. Рассматривая симметричную и антисимметричную линейные комбинации этих функ-

ций, мы получим разложение нашего двумерного представления на неприводимые представления группы \mathcal{S}_2 . Пользуясь схемами Юнга, это можно записать в виде

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

При $n=2, n'=1$ произведение

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \square$$

имеет три базисных вектора. Если мы в качестве симметричной двухчастичной функции $f(1, 2)$ из формулы (17.24) возьмем функцию $\varphi(1)\varphi(2)$, то базисные векторы можно выбрать в виде $\varphi(1)\varphi(2)g(3)$, $\varphi(1)\varphi(3)g(2)$ и $\varphi(2)\varphi(3)g(1)$. Это семейство функций совпадает с семейством, порождаемым функцией $\Phi([21])$ [формула (17.13)]. В табл. 17.1, а также в § 9 мы показали, как это трехмерное пространство разлагается на подпространство, порожданное одним симметричным вектором, и на подпространство, порожданное парой векторов с симметрией [21]. Итак,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (17.26)$$

Этот результат можно получить и другим способом, который легко распространяется на общий случай. Разложим произведение $\varphi(1)\varphi(2)g(3)$ по компонентам, соответствующим таблицам схем Юнга с $n=3$. В силу симметрии по 1 и 2 в разложение могут входить лишь компоненты, соответствующие двум таблицам

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

в которых числа 1 и 2 находятся в одной строке. Если теперь мы образуем всевозможные функции $P\varphi(1)\varphi(2)g(3)$, где перестановки P пробегают всю группу \mathcal{S}_3 , то единственной новой компонентой будет оставшаяся базисная функция

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

для представления [21]. Следовательно, мы приходим к равенству (17.26), т. е. внешнее произведение содержит все неприводимые представления группы \mathcal{G}_s , которые можно образовать путем добавления одного квадрата к первоначальной схеме



Все сказанное можно обобщить на случай разложения

$$T^{(\alpha)} \otimes \square = \sum_{\alpha'} T^{(\alpha')}, \quad (17.27)$$

где суммирование проводится по схемам Юнга α' , которые получаются из схемы α путем добавления одного квадрата. Можно даже вывести правила для нахождения коэффициентов $m(\beta; \alpha, \alpha')$ в общем случае:

$$T = T^{(\alpha)} \otimes T^{(\alpha')} = \sum_{\beta} m(\beta; \alpha, \alpha') T^{(\beta)}, \quad (17.28)$$

где β — разбиение числа $n + n'$. Мы приведем эти правила без доказательства.

1. Впишем букву a в каждый квадрат первой строки схемы α' , букву b в каждый квадрат второй строки и т. д.

2. Добавим заполненные буквами квадраты схемы α' к схеме Юнга α следующим образом: 1) сначала добавляются квадраты с буквами a , затем квадраты с буквами b , затем квадраты с буквами c и т. д.; 2) на каждом шаге должна получаться схема Юнга; 3) в одном столбце не должно быть двух одинаковых букв; 4) если на полученной схеме последовательно пересчитывать добавленные квадраты с буквами, начиная с первой строки и двигаясь справа налево, то на каждом этапе число квадратов с буквой b не должно превышать числа квадратов с буквой a , а число квадратов с буквой c не должно превышать числа квадратов с буквой b и т. д.

3. Представления, отвечающие схемам Юнга β , которые получаются в результате добавления таким способом всех квадратов с буквами, будут входить в сумму (17.28) с ненулевыми коэффициентами. Если по изложенным правилам некоторая схема β может быть построена p различными способами, то в формуле (17.28) для такой схемы β коэффициент $m(\beta; \alpha, \alpha')$ равен p .

Приведем два примера.

I.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ \hline \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & a & a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ \hline \end{array}$$

$$\text{т. е. } T^{[4]} \otimes T^{[8]} = T^{[7]} \oplus T^{[61]} \oplus T^{[52]} \oplus T^{[43]}.$$

II.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & a & \\ \hline \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & a & \\ \hline a & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & a & \\ \hline a & & & \\ \hline b & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & a & \\ \hline a & & & \\ \hline b & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ a \\ b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ a \\ b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ a \\ b \\ \hline \end{array}$$

т. е.

$$T^{[21]} \otimes T^{[21]} = T^{[42]} \oplus T^{[411]} \oplus T^{[33]} \oplus 2T^{[321]} \oplus \\ \oplus T^{[3111]} \oplus T^{[222]} \oplus T^{[2211]}. \quad (17.29)$$

В процессе добавления квадратов разбиение [321] в примере II получается двумя способами. Значит, представление $T^{[321]}$ входит в разложение (17.28) с коэффициентом $m=2$. Пользуясь формулой (17.25), проверим, совпадают ли размерности в обеих частях таких разложений. В этих двух случаях размерности таковы: $1 \times 1 \times 7!/4!3!=35$ для примера I и $2 \times 2 \times 6/3!3!=80$ для примера II. Нетрудно убедиться, что эти числа совпадают с суммами размерностей [с учетом коэффициентов $m(\beta; \alpha, \alpha')$] представлений $T^{(\beta)}$, входящих в разложения.

§ 12. ОГРАНИЧЕНИЕ НА ПОДГРУППУ И ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

В § 7 мы изучали разложения неприводимых представлений группы \mathcal{S}_n при ограничении их на подгруппу \mathcal{S}_{n-1} . Произведение групп $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_{n'}$ является подгруппой группы $\mathcal{S}_{n+n'}$ (например, как в § 11, группа \mathcal{S}_n действует на частицы с номерами 1, 2, ..., n , а группа $\mathcal{S}_{n'}$ — на