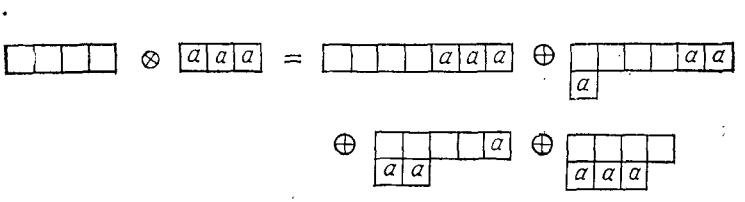
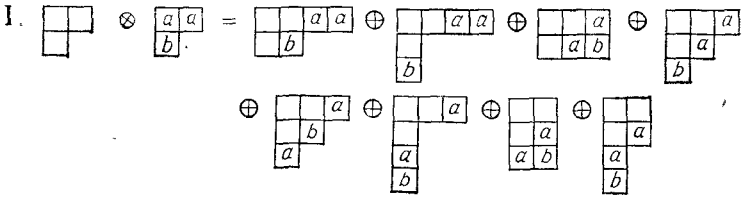
Приведем два примера.

I.



т. е. $T^{[4]} \otimes T^{[3]} = T^{[7]} \oplus T^{[61]} \oplus T^{[52]} \oplus T^{[43]}$.

II.



т. е.

$$T^{[21]} \otimes T^{[21]} = T^{[42]} \oplus T^{[411]} \oplus T^{[33]} \oplus 2T^{[321]} \oplus \oplus T^{[3111]} \oplus T^{[222]} \oplus T^{[2211]}. \quad (17.29)$$

В процессе добавления квадратов разбиение [321] в примере II получается двумя способами. Значит, представление $T^{[321]}$ входит в разложение (17.28) с коэффициентом $m=2$. Пользуясь формулой (17.25), проверим, совпадают ли размерности в обеих частях таких разложений. В этих двух случаях размерности таковы: $1\times1\times7!/4!3!=35$ для примера I и $2\times2\times6/3!3!=80$ для примера II. Нетрудно убедиться, что эти числа совпадают с суммами размерностей [с учетом коэффициентов $m(\beta; \alpha, \alpha')$] представлений $T^{(\beta)}$, входящих в разложения.

§ 12. ОГРАНИЧЕНИЕ НА ПОДГРУППУ И ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

В § 7 мы изучали разложения неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_n$ при ограничении их на подгруппу $\mathscr{S}_{n-1}$. Произведение групп $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_{n'}$ является подгруппой группы $\mathscr{S}_{n+n'}$ (например, как в § 11, группа $\mathscr{S}_n$ действует на частицы с номерами 1, 2, ... n, а группа $\mathscr{S}_{n'}$ — на

частицы с номерами $n+1$, $n+2$, ..., $n+n'$). Следовательно, неприводимое представление $\mathsf{T}^{(\beta)}$ группы $\mathscr{S}_{n+n'}$ будет, вообще говоря, приводимым представлением подгруппы $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_{n'}$:

$$\mathsf{T}^{(\beta)} = \sum_{\alpha,\,\alpha'} m(\beta;\ \alpha,\ \alpha')\,\mathsf{T}^{(\alpha\times\alpha')}, \qquad (17.30)$$

где неприводимое представление произведения групп $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_{n'}$ задается двумя схемами Юнга α и α'. Коэффициенты $m(\beta;\ \alpha,\ \alpha')$, фигурирующие в этом разложении, можно вычислить с помощью таблицы характеров, пользуясь выражением (4.66) для характеров произведения групп.

Читатель, возможно, уже заметил, что мы обозначаем одинаково через $m(\beta;\ \alpha,\ \alpha')$ коэффициенты в двух на первый взгляд совершенно не связанных между собой выражениях (17.28) и (17.30). Это мы сделали намеренно и теперь докажем, что эти коэффициенты совпадают. Из равенства (17.30) следует, что

$$\chi^{(\beta)} = \sum_{\alpha,\,\alpha'} m(\beta;\ \alpha,\ \alpha')\,\chi^{(\alpha\times\alpha')}.$$

В силу ортогональности характеров неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_{n'}$ коэффициенты можно вычислить по формуле

$$\frac{1}{n!n'!}\sum_{G,\,G'} \chi^{(\beta)}(GG')\,\chi^{(\alpha\times\alpha')}(GG') = m(\beta;\ \alpha,\ \alpha'), \qquad (17.31)$$

где G — элемент группы $\mathscr{S}_n$, а G' — элемент группы $\mathscr{S}_{n'}$. Для коэффициентов в разложении (17.28) внешнего произведения представлений соответствующая формула имеет вид

$$\frac{1}{(n+n')!}\sum_{H} \chi^{(\beta)}(H)\,\chi(H) = m(\beta;\ \alpha,\ \alpha'), \qquad (17.32)$$

где H — элемент группы $\mathscr{S}_{n+n'}$, а χ — характер внешнего произведения представлений $\mathsf{T} = \mathsf{T}^{(\alpha)} \otimes \mathsf{T}^{(\alpha')}$. Поскольку представление T порождено функциями типа (17.24), характер представления T должен обращаться в нуль на любом классе сопряженных элементов группы $\mathscr{S}_{n+n'}$, который не содержит элементов подгруппы $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_{n'}$, т. е. $\chi(H) = 0$ для элементов H из таких классов. Можно пока-

зать, что для остальных элементов характер имеет вид

$$N_{\mathsf{H}}\chi(\mathsf{H}) = \frac{(n+n')!}{n!\,n'!}\tilde{N}_{\mathsf{GG'}}\chi^{(\alpha\times\alpha')}(\mathsf{GG'}), \qquad (17.33)$$

где $\mathsf{GG'}$ — элемент группы $\mathscr{S}_n\times\mathscr{S}_{n'}$, принадлежащий тому же классу сопряженных элементов, что и элемент H. Величина N_{H} есть число элементов в этом классе сопряженных элементов группы $\mathscr{S}_{n+n'}$, а величина $\tilde{N}_{\mathsf{GG'}}$ — число элементов в соответствующем классе сопряженных элементов группы $\mathscr{S}_n\times\mathscr{S}_{n'}$. Наконец, подставляя выражение (17.33) в равенство (17.32), мы видим, что суммы (17.31) и (17.32) совпадают, так как все элементы одного класса сопряженных элементов дают одинаковый вклад. Значит, использование одинакового обозначения $m(\beta;\alpha,\alpha')$ в равенствах (17.28) и (17.30) вполне обоснованно.

В частном случае $n'=1$ разложение (17.30) есть не что иное, как рассмотренное в § 7 разложение при ограничении $\mathscr{S}_{n+1}\to\mathscr{S}_n$. Мы убедились там, что все коэффициенты m равны либо единице, либо нулю. Таким образом, это другой способ доказательства формулы (17.27).

В качестве примера разложения (17.30) рассмотрим случай группы $\mathscr{S}_4$ и ее подгруппы $\mathscr{S}_2\times\mathscr{S}_2$. Характеры этой группы приведены в табл. 17.4. Классами сопряжен-

Таблица 17.4

	(11)(11)	(11)(2)	(2)(11)	(2)(2)	
$\mathscr{S}_2\times\mathscr{S}_2$					
[2] ⊗ [2]	1	1	1	1	
[2] ⊗ [11]	1	−1	1	−1	
[11] ⊗ [2]	1	1	−1	−1	
[11] ⊗ [11]	1	−1	−1	1	
$\mathscr{S}_4$					
[4]	1	1	1	1	= [2] ⊗ [2]
[31]	3	1	1	−1	= [2] ⊗ [2] ⊕ [2]⊗[11] ⊕ [11]⊗[2]
[22]	2	0	0	2	= [2] ⊗ [2] ⊕ [11] ⊗ [11]
[211]	3	−1	−1	−1	= [2] ⊗ [2] ⊕ [11]⊗[2] ⊕ [11]⊗[11]
[1111]	1	−1	−1	1	= [11] ⊗ [11]

ных элементов произведения групп $\mathscr{S}_2$ являются всевозможные произведения классов сопряженных элементов (11) и (2) каждой из групп $\mathscr{S}_2$. Аналогично все неприводимые представления произведения групп $\mathscr{S}_2$ одномерны

и являются произведениями представлений [2] и [11] каждой из групп $\mathscr{S}_2$. Для неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_4$ соответствующие характеры находятся с помощью таблицы характеров группы $\mathscr{S}_4$, указанных в табл. 17.1 (§ 5). При этом нужно отождествить классы сопряженных элементов (11)(2) и (2)(11), так как они принадлежат одному классу сопряженных элементов (211) группы $\mathscr{S}_4$. Произведение классов (2)(2) принадлежит классу сопряженных элементов (22). Приведенные в правой части таблицы разложения получаются простым подбором, хотя, конечно, в сомнительных случаях можно воспользоваться соотношением ортогональности (4.28).

На основании этого примера, подставляя соответствующие коэффициенты $m(\beta; [2], [2])$ из табл. 17.4, мы получаем соответствующее разложение (17.28) внешнего произведения представлений

$$[2] \otimes [2] = [4] \oplus [31] \oplus [22]. \qquad (17.34)$$

Как нетрудно убедиться, размерность обеих частей равенства (17.34) одинакова: $1 \times 1 \times 4!/2!2! = 1 + 3 + 2$.

§ 13. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МАТРИЦ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В § 8 мы рассмотрели систему нумерации базисных векторов неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_n$ с помощью таблиц Юнга, основанную на цепочке подгрупп. В § 9 мы привели несколько примеров таких векторов и вычислили соответствующие матрицы представлений. В данном параграфе мы сначала приведем совершенно общие правила *написания* таких матриц (см. книгу [1]), а затем после нескольких примеров обоснуем эти правила. В различных эквивалентных представлениях эти матрицы неодинаковы. Но часто их записывают в виде, который мы назовем каноническим. Его преимуществом является то, что матрицы тогда ортогональны. Если матрицы известны, то с помощью проекционных операторов (гл. 4, § 19; в случае группы $\mathscr{S}_n$ они называются симметризаторами Юнга) можно из любой заданной функции построить семейство базисных векторов. Таким образом, порядок изложения будет обратным по сравнению