и являются произведениями представлений [2] и [11] каждой из групп $\mathscr{S}_2$. Для неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_4$ соответствующие характеры находятся с помощью таблицы характеров группы $\mathscr{S}_4$, указанных в табл. 17.1 (§ 5). При этом нужно отождествить классы сопряженных элементов (11)(2) и (2)(11), так как они принадлежат одному классу сопряженных элементов (211) группы $\mathscr{S}_4$. Произведение классов (2)(2) принадлежит классу сопряженных элементов (22). Приведенные в правой части таблицы разложения получаются простым подбором, хотя, конечно, в сомнительных случаях можно воспользоваться соотношением ортогональности (4.28).

На основании этого примера, подставляя соответствующие коэффициенты $m(\beta; [2], [2])$ из табл. 17.4, мы получаем соответствующее разложение (17.28) внешнего произведения представлений

$$[2] \otimes [2] = [4] \oplus [31] \oplus [22]. \tag{17.34}$$

Как нетрудно убедиться, размерность обеих частей равенства (17.34) одинакова: $1 \times 1 \times 4!/2!2! = 1 + 3 + 2$.

§ 13. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МАТРИЦ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В § 8 мы рассмотрели систему нумерации базисных векторов неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_n$ с помощью таблиц Юнга, основанную на цепочке подгрупп. В § 9 мы привели несколько примеров таких векторов и вычислили соответствующие матрицы представлений. В данном параграфе мы сначала приведем совершенно общие правила написания таких матриц (см. книгу [1]), а затем после нескольких примеров обоснуем эти правила. В различных эквивалентных представлениях эти матрицы неодинаковы. Но часто их записывают в виде, который мы назовем каноническим. Его преимуществом является то, что матрицы тогда ортогональны. Если матрицы известны, то с помощью проекционных операторов (гл. 4, § 19; в случае группы $\mathscr{S}_n$ они называются симметризаторами Юнга) можно из любой заданной функции построить семейство базисных векторов. Таким образом, порядок изложения будет обратным по сравнению

с изложением в § 9, где мы сначала строили в простых случаях базисные векторы, а затем получали матрицы.

Рассмотрим какое-либо неприводимое представление $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ группы $\mathcal{S}_n$. Разбиение α_n числа n задает схему Юнга. Как говорилось в § 8, индексы базисных векторов определяются возможными таблицами Юнга $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2$. (Например, в табл. 17.5 изображены девять таблиц Юнга, соответствующих разбиению [42].) В § 1 мы показали, что любую перестановку можно выразить через смежные перестановки $\mathsf{P}_{i-1,\,i}$. Назовем перестановку $\mathsf{P}_{i-1,\,i}$ последней простой перестановкой подгруппы $\mathcal{S}_i$. Общее правило для нахождения матрицы последней простой перестановки $\mathsf{P}_{n-1,\,n}$ группы $\mathcal{S}_n$ позволит нам найти матрицы всех смежных перестановок и, следовательно, матрицы вообще всех перестановок. Здесь мы исходим из того, что таблица $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2$ для группы $\mathcal{S}_n$ при последовательном отбрасывании разбиений $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_3$ переходит в таблицы для цепочки подгрупп $\mathcal{S}_{n-1}, \mathcal{S}_{n-2}, \ldots, \mathcal{S}_2$.

На объектах с номерами $1, 2, \ldots, n-2$ перестановка $\mathsf{P}_{n-1,\,n}$ является тождественным преобразованием. Значит, ненулевыми матричными элементами перестановки $\mathsf{P}_{n-1,\,n}$ будут лишь матричные элементы между теми векторами, у которых таблицы Юнга из чисел $1, 2, \ldots, n-2$ совпадают. Поэтому мы должны для заданного разбиения $[n_1n_2\ldots]$ искать таблицы, которые содержат одинаковые таблицы из чисел $1, 2, \ldots, n-2$. Обозначим через y таблицу разбиения $[n_1n_2\ldots]$, а через $\tilde{y}$—таблицу, которая получается из таблицы y в результате удаления чисел n и $n-1$. Все возможные таблицы y можно разделить на четыре типа: a) таблицы, в которых числа n и $n-1$ находятся в одной строке; b) таблицы, в которых числа n и $n-1$ находятся в одном столбце; c_1) таблицы, в которых числа n и $n-1$ не лежат ни в одной строке, ни в одном столбце, причем число n лежит в более низкой строке, чем число $n-1$; c_2) этот тип таблиц подобен типу c_1, но теперь число n лежит в более высокой строке, чем число $n-1$. В табл. 17.5 таблицы Юнга в первой, восьмой и девятой строках принадлежат типу a, во второй, третьей и четвертой строках—типу c_1, а в пятой, шестой и седьмой строках—типу c_2.

Таблица 17.5

Матрица перестановки P_{56} в неприводимом представлении $T^{[42]}$ группы $\mathcal{S}_6$

	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&3&5\\\hline 4&6\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&4&5\\\hline 3&6\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&4&5\\\hline 2&6\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&3&6\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&4&6\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&4&6\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&5&6\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&5&6\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6\\\cline{1-2}\end{array}$	1								
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&3&5\\\hline 4&6\\\cline{1-2}\end{array}$		$-\frac{1}{3}$			$\sqrt{\frac{8}{9}}$				
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&4&5\\\hline 3&6\\\cline{1-2}\end{array}$			$-\frac{1}{3}$			$\sqrt{\frac{8}{9}}$			
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&4&5\\\hline 2&6\\\cline{1-2}\end{array}$				$-\frac{1}{3}$			$\sqrt{\frac{8}{9}}$		
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&3&6\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$		$\sqrt{\frac{8}{9}}$			$\frac{1}{3}$				
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&4&6\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}$			$\sqrt{\frac{8}{9}}$			$\frac{1}{3}$			
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&4&6\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}$				$\sqrt{\frac{8}{9}}$			$\frac{1}{3}$		
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&5&6\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$								1	
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&5&6\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$									1

Легко видеть, что таблица $\tilde{y}$, получающаяся из какой-либо таблицы y типа a или b, не может порождаться никакой другой таблицей разбиения $[n_1 n_2 \ldots]$. Таблица $\tilde{y}$, порожденная таблицей типа c_1, будет также получаться из соответствующей таблицы типа c_2, в которой числа n и $n-1$ переставлены наоборот. Следовательно, единственными ненулевыми матричными элементами перестановки $\mathsf{P}_{n-1,\,n}$ будут диагональные матричные элементы для таблиц типа a или b, а также матричные элементы, образующие блоки из 2×2-матриц, связывающих пары таблиц типа c_1 и c_2.

В табл. 17.5 приведены ненулевые элементы матрицы перестановки P_{56} для разбиения [42]. Способ нахождения численных значений матричных элементов будет указан позднее. Отметим, что индексом первой строки служит таблица Юнга

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

принадлежащая типу a. Для этой строки таблица $\tilde{y}$ равна

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

Она больше нигде не встречается. Поэтому единственный ненулевой элемент первой строки должен находиться на диагонали. Таблица второй строки принадлежит типу c_1. Парной для нее таблицей типа c_2 будет таблица пятой строки. Лишь эти две таблицы имеют общую таблицу:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Следовательно, на пересечении второй строки с пятым столбцом, а также пятой строки со вторым столбцом находятся ненулевые матричные элементы. Все другие матричные элементы во второй и пятой строках, кроме диагональных, равны нулю. Немногочисленные ненулевые матричные элементы вычисляются по следующим правилам:

1. Диагональный матричный элемент таблицы типа a равен $+1$.

2. Диагональный матричный элемент таблицы типа b равен -1.

3. Диагональный матричный элемент таблиц типа c_1 и типа c_2 равен $-l^{-1}$ и $+l^{-1}$, где l — число, называемое «аксиальным расстоянием» от числа $n-1$ до числа n. Оно определяется как наименьшее число шагов, которое нужно сделать, чтобы от числа $n-1$ перейти к числу n, двигаясь последовательно в горизонтальном и вертикальном направлениях от одного квадрата к другому соседнему квадрату. Перемещение на один квадрат влево или вниз считается положительным шагом. На самом деле вышеприведенные правила 1 и 2 являются частными случаями правила 3.

4. Недиагональные матричные элементы, соответствующие паре таблиц типа c_1 и c_2, равны $+(1-l^{-2})^{1/2}$. Этим обеспечивается ортогональность матрицы.

По этим правилам можно вычислять, как говорилось ранее, не только матрицу перестановки $\mathbf{P}_{56}$, приведенную в табл. 17.5, но и матрицы всех других смежных перестановок. Так, например, матрица перестановки $\mathbf{P}_{34}$ в представлении $\mathbf{T}^{[42]}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & -\frac{1}{3} & \sqrt{\frac{8}{9}} & & & & & & & \\ & \sqrt{\frac{8}{9}} & \frac{1}{3} & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -\frac{1}{3} & \sqrt{\frac{8}{9}} & & & & \\ & & & & \sqrt{\frac{8}{9}} & \frac{1}{3} & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & -1 & \end{pmatrix}.$$

В качестве другого примера можно, пользуясь этими правилами, проверить правильность вычисления в § 9 матриц простых перестановок $\mathbf{P}_{12}$ и $\mathbf{P}_{23}$ в представлении [21] группы $\mathscr{S}_3$.

В заключение дадим обоснование наших правил. Обозначим через $\mathbf{T}(\mathbf{P}_{n-1,\,n})$ матрицу перестановки $\mathbf{P}_{n-1,\,n}$. Так как $\mathbf{P}^2_{n-1,\,n}=\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — тождественное преобразование,

мы имеем $\mathsf{T}^2=1$. В силу сказанного в гл. 4, § 6 любое представление конечной группы эквивалентно унитарному. Поэтому мы можем потребовать, чтобы матрица T была унитарной, т. е. выполнялось условие $\mathsf{T}\mathsf{T}^\dagger=1$. Из этих двух условий для матрицы T следует, что диагональные матричные элементы, соответствующие таблицам типа a и b, должны быть равны ± 1, а блоки из 2×2-матриц, соответствующие таблицам типа c_1 и c_2, должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} -a & \sqrt{(1-a^2)} \\ \sqrt{(1-a^2)} & a \end{pmatrix}, \tag{17.35}$$

где a — некоторое действительное число. Положительные квадратные корни соответствуют определенному выбору отношения фазовых множителей для базисных векторов. Осталось доказать, что $a=l^{-1}$, где l — аксиальное расстояние в таблице типа c_1 от числа $n-1$ до числа n. Доказательство проведем по индукции: мы покажем, что если наши правила справедливы для чисел $n-2$ и $n-1$, то они справедливы и для числа n. Тогда, зная, что наши правила применимы к специальным случаям $n=2$, 3, мы можем считать, что они применимы для всех чисел n. Для доказательства нам потребуется тождество

$$\mathsf{P}_{n-1,\,n}\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}\mathsf{P}_{n-1,\,n}=\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}\mathsf{P}_{n-1,\,n}\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}, \tag{17.36}$$

в справедливости которого нетрудно убедиться. Предположим, что парные таблицы типа c_1 и c_2 расположены в строках r и s представления T. Для двух эквивалентных выражений в равенстве (17.36) построим матричный элемент, расположенный на пересечении строки r со столбцом s. Заметим, что такой матричный элемент для перестановки $\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}$ должен быть равен нулю, так как схемы Юнга, получаемые путем удаления числа n из этих двух таблиц, неодинаковы, а перестановка $\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}$ принадлежит подгруппе $\mathscr{S}_{n-1}$. По предположению диагональные матричные элементы перестановки $\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}$ вычисляются в соответствии со сформулированными выше правилами, так что $T_{rr}(\mathsf{P}_{n-2,\,n-1})=-l_1^{-1}$, $T_{ss}(\mathsf{P}_{n-2,\,n-1})=-l_2^{-1}$, где l_1 — аксиальное расстояние от числа $n-2$ до числа $n-1$ в таблице Юнга строки r, а l_2 — аксиальное расстояние от числа $n-2$ до $n-1$ в таблице Юнга строки s. Подставляя выражение (17.35) для матрицы $\mathsf{T}(\mathsf{P}_{n-1,\,n}$

в тождество (17.36), получаем матричный элемент, стоящий на пересечении строки r со столбцом s: $al_1^{-1}\sqrt{(1-a^2)}-$ $-\sqrt{(1-a^2)}\,l_2^{-1}a=l_1^{-1}\sqrt{(1-a^2)}\,l_2^{-1}$. Отсюда $a=(l_2-l_1)^{-1}$. Таблицы Юнга строк r и s различаются лишь заменой чисел n и $n-1$. Значит, l_2 — это аксиальное расстояние от числа $n-2$ до числа n в таблице строки r. Следовательно, разность (l_2-l_1) должна совпадать с аксиальным расстоянием от числа $n-1$ до числа n в таблице строки r. Другими словами, $a=l^{-1}$. Таким образом, считая, что правила применимы к перестановке $\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}$, мы доказали, что они применимы и к перестановке $\mathsf{P}_{n-1,\,n}$, что и требовалось. Правила 1 и 2 можно рассматривать как частные случаи, соответствующие аксиальным расстояниям ∓ 1.

§ 14. ОПЕРАТОР $\sum\limits_{i<j}\mathsf{T}(\mathsf{P}_{ij})$ КЛАССА СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Можно показать (приложение 3, § 3), что в любом неприводимом представлении $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ сумма $\sum\limits_{\gamma}\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_\gamma)$ операторов представления по всем элементам группы G_γ, лежащим в выбранном классе $\mathscr{C}$ сопряженных элементов, пропорциональна единичной матрице. Коэффициент пропорциональности λ выражается через характер этого класса сопряженных элементов: $\lambda_\alpha=n_{\mathscr{C}}\chi_{\mathscr{C}}^{(\alpha)}/s_\alpha$, где $n_{\mathscr{C}}$ — число элементов в классе сопряженных элементов, а s_α — размерность представления. Для группы перестановок $\mathscr{S}_n$ простые перестановки P_{ij} образуют класс сопряженных элементов (211...) (в обозначениях § 3). Поэтому сумма $\sum\limits_{i<j}\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{P}_{ij})$ операторов в неприводимом представлении $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ должна быть пропорциональной единичному оператору. Коэффициент пропорциональности λ_α можно вычислить на основании таблицы характеров. Такой оператор дает удобный критерий симметрии представления. Например, в полностью симметричном представлении он равен $^1/_2 n(n-1)$, а в полностью антисимметричном представлении этот оператор отрицателен. В силу сказанного в § 10 этот оператор обращается в нуль в самосопряженном представлении. Мы можем рассматривать этот опера-