в тождество (17.36), получаем матричный элемент, стоящий на пересечении строки r со столбцом s: $al_1^{-1}\sqrt{(1-a^2)}-$ $-\sqrt{(1-a^2)}\,l_2^{-1}a=l_1^{-1}\sqrt{(1-a^2)}\,l_2^{-1}$. Отсюда $a=(l_2-l_1)^{-1}$. Таблицы Юнга строк r и s различаются лишь заменой чисел n и $n-1$. Значит, l_2 — это аксиальное расстояние от числа $n-2$ до числа n в таблице строки r. Следовательно, разность (l_2-l_1) должна совпадать с аксиальным расстоянием от числа $n-1$ до числа n в таблице строки r. Другими словами, $a=l^{-1}$. Таким образом, считая, что правила применимы к перестановке $\mathsf{P}_{n-2,\,n-1}$, мы доказали, что они применимы и к перестановке $\mathsf{P}_{n-1,\,n}$, что и требовалось. Правила 1 и 2 можно рассматривать как частные случаи, соответствующие аксиальным расстояниям ∓ 1.

§ 14. ОПЕРАТОР $\sum\limits_{i<j}\mathsf{T}(\mathsf{P}_{ij})$ КЛАССА СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Можно показать (приложение 3, § 3), что в любом неприводимом представлении $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ сумма $\sum\limits_{\gamma}\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_\gamma)$ операторов представления по всем элементам группы G_γ, лежащим в выбранном классе $\mathscr{C}$ сопряженных элементов, пропорциональна единичной матрице. Коэффициент пропорциональности λ выражается через характер этого класса сопряженных элементов: $\lambda_\alpha=n_{\mathscr{C}}\chi_{\mathscr{C}}^{(\alpha)}/s_\alpha$, где $n_{\mathscr{C}}$ — число элементов в классе сопряженных элементов, а s_α — размерность представления. Для группы перестановок $\mathscr{S}_n$ простые перестановки P_{ij} образуют класс сопряженных элементов (211...) (в обозначениях § 3). Поэтому сумма $\sum\limits_{i<j}\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{P}_{ij})$ операторов в неприводимом представлении $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ должна быть пропорциональной единичному оператору. Коэффициент пропорциональности λ_α можно вычислить на основании таблицы характеров. Такой оператор дает удобный критерий симметрии представления. Например, в полностью симметричном представлении он равен $^1/_2 n(n-1)$, а в полностью антисимметричном представлении этот оператор отрицателен. В силу сказанного в § 10 этот оператор обращается в нуль в самосопряженном представлении. Мы можем рассматривать этот опера-

тор класса сопряженных элементов как оператор разности между числом симметричных и антисимметричных пар. Конечно, нужно иметь в виду, что отдельные операторы $\mathsf{T}(\mathsf{P}_{ij})$ не являются, вообще говоря, диагональными. Для чисел λ_α существует простая формула, позволяющая вычислять их прямо на основании схемы Юнга представления T^α. Если длину строки p обозначить через n_p, а длину столбца q через m_q, то можно показать (задача 17.7), что

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2}\sum_p n_p(n_p-1) - \frac{1}{2}\sum_q m_q(m_q-1). \qquad (17.37)$$

ЛИТЕРАТУРА [1])

Подробное изложение теории группы перестановок, ее представлений и проекционных операторов можно найти в книгах:

1. *Rutherford D. E.*, Substitutional Analysis, Edinburgh University Press, 1948.

2*. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп.— М.: Наука, 1976.

Коэффициенты Клебша—Гордана для этой группы подробно обсуждаются в книге:

3. *Hamermesh M.*, Group Theory and its Application to Physical Problems, Addison Wesley, Reading, Mass., 1962.

[Имеется перевод: *Хамермеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам.— М.: Мир, 1966.]

В следующих книгах описана связь между группой $\mathcal{S}_n$ и непрерывными группами U_N и $\mathcal{R}_N$; в них можно также найти формулы для характеров и другие полезные формулы:

4. *Littlewood D. E.*, The Theory of Group Characters, Oxford University Press, 1950.

5*. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1947.

ЗАДАЧИ

17.1. Представьте перестановку $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&6&1&5&3\end{pmatrix}$ в виде произведения циклов. Покажите, что она принадлежит классу сопряженных элементов [321] и имеет отрицательную четность.

17.2. Пользуясь методами гл. 4, § 15, постройте таблицу характеров группы $\mathcal{S}_4$. Сопоставьте ваш результат с табл. 17.1 (§ 5).

17.3. Постройте табл. 17.1 для значений характеров $\psi^{[n_1 n_2 \ldots]}$ и $\chi^{[n_1 n_2 \ldots]}$ в случае $n=4$.

---

[1]) Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе.— *Прим. ред.*