тор класса сопряженных элементов как оператор разности между числом симметричных и антисимметричных пар. Конечно, нужно иметь в виду, что отдельные операторы $\mathsf{T}(\mathsf{P}_{ij})$ не являются, вообще говоря, диагональными. Для чисел λ_α существует простая формула, позволяющая вычислять их прямо на основании схемы Юнга представления T^α. Если длину строки p обозначить через n_p, а длину столбца q через m_q, то можно показать (задача 17.7), что

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2}\sum_p n_p(n_p-1) - \frac{1}{2}\sum_q m_q(m_q-1). \qquad (17.37)$$

ЛИТЕРАТУРА [1])

Подробное изложение теории группы перестановок, ее представлений и проекционных операторов можно найти в книгах:

1. *Rutherford D. E.*, Substitutional Analysis, Edinburgh University Press, 1948.

2*. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп.— М.: Наука, 1976.

Коэффициенты Клебша—Гордана для этой группы подробно обсуждаются в книге:

3. *Hamermesh M.*, Group Theory and its Application to Physical Problems, Addison Wesley, Reading, Mass., 1962.

[Имеется перевод: *Хамермеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам.— М.: Мир, 1966.]

В следующих книгах описана связь между группой $\mathcal{S}_n$ и непрерывными группами U_N и $\mathcal{R}_N$; в них можно также найти формулы для характеров и другие полезные формулы:

4. *Littlewood D. E.*, The Theory of Group Characters, Oxford University Press, 1950.

5*. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1947.

ЗАДАЧИ

17.1. Представьте перестановку $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&6&1&5&3\end{pmatrix}$ в виде произведения циклов. Покажите, что она принадлежит классу сопряженных элементов [321] и имеет отрицательную четность.

17.2. Пользуясь методами гл. 4, § 15, постройте таблицу характеров группы $\mathcal{S}_4$. Сопоставьте ваш результат с табл. 17.1 (§ 5).

17.3. Постройте табл. 17.1 для значений характеров $\psi^{[n_1 n_2 \ldots]}$ и $\chi^{[n_1 n_2 \ldots]}$ в случае $n=4$.

---

[1]) Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе.— *Прим. ред.*

17.4. Перечислив возможные таблицы Юнга, найдите размерность представления [32] группы $\mathcal{S}_5$.

17.5. Пользуясь методами § 9, постройте матрицы перестановок P_{12}, P_{23} и P_{34} в представлении $\mathsf{T}^{[31]}$ группы $\mathcal{S}_4$. Сравните ваши ответы с матрицами, вычисленными по правилам § 13.

17.6. Пусть f_i и g_i — семейства функций, преобразующихся по представлению $\mathsf{T}_{ij}^{(\alpha)}$ группы $\mathcal{S}_n$, матрицы которого ортогональны. Покажите, что сумма $F_s = \sum_i f_i g_i$ полностью симметрична.

Пусть h_i — семейство функций, преобразующихся по сопряженному представлению $\mathsf{T}^{[11\ldots1]} \otimes \mathsf{T}^{(\alpha)}$. Покажите, что сумма $F_a = \sum_i f_i h_i$ полностью антисимметрична.

17.7. Вычислите величину λ_α [формула 17.37)] для оператора класса сопряженных элементов $\mathsf{Q} = \sum_{i<j} \mathsf{T}(\mathsf{P}_{ij})$ в представлении $\mathsf{T}^{[n_1 n_2 \ldots]}$.

Вычисления нужно проводить в следующей последовательности: а) пусть f — базисный вектор, для которого числа от 1 до n_1 находятся в первой строке его таблицы Юнга y, числа от n_1+1 до n_1+n_2 — во второй строке и т. д.; постройте функцию $g = \mathsf{A}f$, где A — произведение антисимметризаторов для столбцов таблицы y; б) оператор Q представьте в виде $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_r + \mathsf{Q}_c + \mathsf{Q}_m$, где Q_r содержит те пары ij, которые лежат в одной строке, Q_c содержит пары, лежащие в одном столбце, а Q_m содержит оставшиеся пары; в) покажите, что $\mathsf{Q}_c g = -{}^1/_2 \sum_q m_q (m_q - 1) g$; г) покажите, что $(\mathsf{Q}_r + \mathsf{Q}_m) \mathsf{A} f = \mathsf{A}(\mathsf{Q}_r + \mathsf{Q}_m) f$; д) покажите, что $\mathsf{Q}_r f = {}^1/_2 \sum_p m_p (m_p - 1) f$; е) покажите, что $\mathsf{A}\mathsf{Q}_m f = 0$.