

биения α служат как для нумерации неприводимых представлений конечной группы \mathcal{S}_n , так и для нумерации неприводимых представлений непрерывной группы U_N . При фиксированном числе N можно брать любые положительные целые числа n , соответствующие разным числам сомножителей в произведениях (18.2). Поэтому, как и должно быть в случае непрерывной группы, мы получаем бесконечное число неприводимых представлений. Существует, однако, одно ограничение на возможные разбиения $[n_1 n_2 \dots]$. Напомним, что, согласно сказанному в гл. 17, разбиение на p частей предполагает полную антисимметрию для множеств из p частиц, выбранных из первоначальных n частиц. Но при $p > N$ это невозможно, так как имеется всего N различных одночастичных состояний. Значит, неприводимые представления $U^{(\alpha)}$ группы U_N нумеруются разбиениями $[n_1 n_2 \dots]$ любого целого числа n (на не более чем N частей). Иначе говоря, их можно занумеровать схемами Юнга с не более чем N строками.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Чтобы проиллюстрировать довольно абстрактные утверждения предыдущего параграфа, рассмотрим примеры с небольшими числами N и n .

1) $N = 2, n = 2$. Введем обозначение $\varphi_i(1) \varphi_j(2) \varphi_k(3) \dots \varphi_p(n) \equiv |ijk \dots p\rangle$. Тогда существуют $N^n = 4$ произведения $|11\rangle, |12\rangle, |21\rangle, |22\rangle$. Неприводимые представления группы \mathcal{S}_2 нумеруются двумя возможными разбиениями [2] и [11], а соответствующие подпространства определяются следующими базисными векторами:

$$\begin{aligned} L^{[2]}: & \quad |11\rangle, (|12\rangle + |21\rangle)/\sqrt{2}, |22\rangle, \\ L^{[11]}: & \quad (|12\rangle - |21\rangle)/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Так, например, разбиению [2] соответствует, как мы видим, трехмерное представление группы U_2 и, согласно сказанному в гл. 17, § 5, одномерное представление группы \mathcal{S}_2 .

2) $N = 3, n = 2$. Пользуясь тем же обозначением, что и выше, разложим $3^2 = 9$ -мерное пространство L на под-

пространства

$$L^{(2)}: \quad |11\rangle, |22\rangle, |33\rangle, (|12\rangle + |21\rangle)/\sqrt{2}, (|13\rangle + |31\rangle)/\sqrt{2}, \\ (|23\rangle + |32\rangle)/\sqrt{2},$$

$$L^{(11)}: \quad (|12\rangle - |21\rangle)/\sqrt{2}, (|13\rangle - |31\rangle)/\sqrt{2}, \\ (|23\rangle - |32\rangle)/\sqrt{2}.$$

Таким образом, разбиения [2] и [11] теперь соответствуют шестимерному и трехмерному представлениям группы U_3 .

3) $N=2$, $n=3$. Теперь $2^3=8$ произведений имеют вид $|111\rangle, |112\rangle, |121\rangle, |211\rangle, |122\rangle, |212\rangle, |221\rangle, |222\rangle$. Подпространство $L^{(3)}$ — это просто множество полностью симметричных комбинаций таких векторов. Его легко построить:

$$L^{(3)}: \quad |111\rangle, (|112\rangle + |121\rangle + |211\rangle)/\sqrt{3}, \\ |222\rangle, (|221\rangle + |212\rangle + |122\rangle)/\sqrt{3}.$$

Представление группы \mathcal{S}_3 , соответствующее разбиению [21], двумерно. Поэтому соответствующий блок (18.6) имеет две строки. Вспомнив пример из гл. 17, § 9 или применив проекционный оператор, мы убеждаемся, что в качестве блока базисных векторов можно взять следующую таблицу:

$$L^{(21)}: \\ (2|112\rangle - |121\rangle - |211\rangle)/\sqrt{6}, (2|221\rangle - |212\rangle - |122\rangle)/\sqrt{6}, \\ (|121\rangle - |211\rangle)/\sqrt{2}, \quad (|212\rangle - |122\rangle)/\sqrt{2}.$$

В каждом столбце мы расположили векторы, преобразующиеся по обычному представлению $T^{(21)}$ (гл. 17, § 9). Мы не получили еще представления $U^{(21)}$ в обычном виде, но два вектора в первой строке различаются числом «частиц» в каждом «состоянии». Очевидно, что они взаимно ортогональны, но любая пара ортогональных векторов, построенных как их линейные комбинации, тоже может служить базисом. О выборе обычного базиса представлений $U^{(\alpha)}$ говорится в § 4. Для доказательства того, что каждая строка порождает одно и то же представление группы U_N , достаточно показать, что матрицы общего

унитарного преобразования $T(U)$ одинаковы в этих двух пространствах. При этом нужно воспользоваться соотношением $\langle i'j'k'|T(U)|ijk\rangle = U_{i'i}U_{j'j}U_{k'k}$, вытекающим из определения (18.3). На этом заканчивается разложение пространства L , так как пространство $L^{[111]}$ отсутствует из-за того, что $N=2$. Любая попытка спроектировать на такое пространство приводит к нулевым векторам.

4) $N=3$, $n=3$. Мы оставляем этот пример в качестве упражнения. Пространство L теперь $3^3=27$ -мерно. Оно разлагается на десятимерное пространство $L^{[3]}$, на шестнадцатимерное пространство $L^{[21]}$, которое описывается блоком с двумя строками и восемью столбцами, и на одномерное пространство $L^{[111]}$.

§ 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОДГРУПП $U_N \rightarrow U_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_2 \rightarrow U_1$

Часто бывает удобно выделить последовательность подгрупп. С ее помощью можно занумеровать базисные векторы представлений. Например, в гл. 7, используя подгруппу \mathcal{R}_2 группы \mathcal{R}_3 , нумеровали с помощью числа t базисные векторы представления $D^{(t)}$ группы \mathcal{R}_3 . В гл. 11 мы нумеровали базисные векторы представлений (λ, μ) группы SU_3 числами T, M_T и Y , которые связаны с подгруппами SU_2 , \mathcal{R}_2 и U_1 группы SU_3 . Тот же способ применялся к группе перестановок \mathcal{S}_n в гл. 17, § 8, где рассматривалась последовательность $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{S}_2$.

В случае унитарных групп мы возьмем последовательность подгрупп $U_N \rightarrow U_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_2 \rightarrow U_1$. Она получается путем последовательного ограничения преобразований на пространства, размерность которых на единицу меньше. Достаточно рассмотреть лишь первый шаг в этой последовательности. Для простоты рассмотрим сужение $U_N \rightarrow U_{N-1} \times U_1$, которое для отбрасываемого одномерного пространства сохраняет простые преобразования из группы U_1 . Группа U_1 состоит из 1×1 -матриц вида $\exp(-i\theta)$ и, как и группа \mathcal{R}_2 в гл. 7, § 3, имеет одномерные неприводимые представления $\exp(-it\theta)$, нумеруемые целым числом t . Пусть для определенности ϕ_N — базисный вектор отбрасываемого пространства (в тех же обозначениях, что и в § 1). Тогда