унитарного преобразования $\mathsf{T}(\mathsf{U})$ одинаковы в этих двух пространствах. При этом нужно воспользоваться соотношением $\langle i'j'k' | \mathsf{T}(\mathsf{U}) | ijk \rangle = U_{i'i} U_{j'j} U_{k'k}$, вытекающим из определения (18.3). На этом заканчивается разложение пространства L, так как пространство $L^{[111]}$ отсутствует из-за того, что $N=2$. Любая попытка спроектировать на такое пространство приводит к нулевым векторам.

4) $N=3$, $n=3$. Мы оставляем этот пример в качестве упражнения. Пространство L теперь $3^3=27$-мерно. Оно разлагается на десятимерное пространство $L^{[3]}$, на шестнадцатимерное пространство $L^{[21]}$, которое описывается блоком с двумя строками и восемью столбцами, и на одномерное пространство $L^{[111]}$.

§ 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОДГРУПП $U_N \to U_{N-1} \to \to U_{N-2} \to \ldots \to U_2 \to U_1$

Часто бывает удобно выделить последовательность подгрупп. С ее помощью можно занумеровать базисные векторы представлений. Например, в гл. 7, используя подгруппу $\mathcal{R}_2$ группы $\mathcal{R}_3$, нумеровали с помощью числа m базисные векторы представления $\mathsf{D}^{(j)}$ группы $\mathcal{R}_3$. В гл. 11 мы нумеровали базисные векторы представлений (λ, μ) группы SU_3 числами T, M_T и Y, которые связаны с подгруппами SU_2, $\mathcal{R}_2$ и U_1 группы SU_3. Тот же способ применялся к группе перестановок $\mathcal{S}_n$ в гл. 17, § 8, где рассматривалась последовательность $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_{n-1} \to \ldots \ldots \to \mathcal{S}_2$.

В случае унитарных групп мы возьмем последовательность подгрупп $U_N \to U_{N-1} \to \ldots \to U_2 \to U_1$. Она получается путем последовательного ограничения преобразований на пространства, размерность которых на единицу меньше. Достаточно рассмотреть лишь первый шаг в этой последовательности. Для простоты рассмотрим сужение $U_N \to U_{N-1} \times U_1$, которое для отбрасываемого одномерного пространства сохраняет простые преобразования из группы U_1. Группа U_1 состоит из 1×1-матриц вида $\exp(-i\theta)$ и, как и группа $\mathcal{R}_2$ в гл. 7, § 3, имеет одномерные неприводимые представления $\exp(-im\theta)$, нумеруемые целым числом m. Пусть для определенности φ_N—базисный вектор отбрасываемого пространства (в тех же обозначениях, что и в § 1). Тогда

преобразования U_{N-1} действуют на базисные векторы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}$. Произведение вида $\mathbf{\Phi}$ [формула (18.2)] будет преобразовываться по представлению $\exp(-ir\theta)$ группы U_1, если в него вектор φ_N входит r раз, т. е. если r из n частиц находятся в состоянии φ_N. Найдем разложение представления $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$ группы U_N при ограничении его на подгруппу $U_{N-1}\times U_1$. Индекс n удобно включить в обозначение α_n, чтобы подчеркнуть, что α_n — это разбиение числа n, или, иначе говоря, схема Юнга из n квадратов. Сначала мы сформулируем результат, а затем докажем его. Итак,

$$\mathsf{U}^{(\alpha_n)} = \dot{\sum_{r=0}^{n}} \dot{\sum_{\alpha_{n-r}}}' V^{(\alpha_{n-r})} \times \exp(-ir\theta), \tag{18.9}$$

где $V^{(\alpha_{n-r})}$ — неприводимое представление группы U_{N-1}. Штрих у суммы означает, что берутся лишь те схемы Юнга α_{n-r}, которые можно получить из схемы Юнга α_n, удаляя r квадратов, причем нельзя брать два квадрата из одного столбца. Не доказывая пока этот результат, проиллюстрируем его на примерах § 2 для ограничения $U_3 \to U_2 \times U_1$ и $n=2$:

$$\mathsf{U}^{[2]} = \mathsf{V}^{[2]} \oplus \exp(-i\theta)\,\mathsf{V}^{[1]} \oplus \exp(-2i\theta)\,\mathsf{V}^{[0]},$$
$$\mathsf{U}^{[11]} = \mathsf{V}^{[11]} \oplus \exp(-i\theta)\,\mathsf{V}^{[1]}.$$

Замечая, что число r соответствует числу частиц в состоянии φ_3, нетрудно каждому представлению $\mathsf{V}^{(\alpha_{2-r})}$ сопоставить базисные векторы из примера 2, § 2:

$$\mathsf{U}^{[2]}\begin{cases} r=0\ \mathsf{V}^{[2]}\colon\ |11\rangle,\ |22\rangle,\ (|12\rangle+|21\rangle)/\sqrt{2}, \\ r=1\ \mathsf{V}^{[1]}\colon\ (|13\rangle+|31\rangle)/\sqrt{2},\ (|23\rangle+|32\rangle)/\sqrt{2}, \\ r=2\ \mathsf{V}^{[0]}\colon\ |33\rangle, \end{cases}$$

$$\mathsf{U}^{[11]}\begin{cases} r=0\ \mathsf{V}^{[11]}\colon\ (|12\rangle-|21\rangle)/\sqrt{2}, \\ r=1\ \mathsf{V}^{[1]}\colon\ (|13\rangle-|31\rangle)/\sqrt{2},\ (|23\rangle-|32\rangle)/\sqrt{2}, \end{cases}$$

Приведенные здесь для представлений $\mathsf{V}^{[2]}$ и $\mathsf{V}^{[11]}$ векторы совпадают с векторами из примера 1, § 2. Две пары векторов, соответствующие представлению $\mathsf{V}^{[1]}$, различны, но при действии группы U_2 на состояния φ_1 и φ_2 они преобразуются одинаковым образом. В самом деле, они преобразуются, как векторы $|1\rangle$ и $|2\rangle$ с помощью 2×2-

матриц исходного представления группы U_2, которое соответствует $n=1$. Оставшийся вектор $|33\rangle$ очевидным образом инвариантен относительно группы U_2.

Для доказательства формулы (18.9), или «закона ветвления», как она иногда называется, мы применим разложение внешнего произведения неприводимых представлений группы $\mathscr{S}_n$ (гл. 17, § 11). Сначала мы разложим пространство L, состоящее из всех произведений типа (18.2), на подпространства, $L=\sum_{r=0}^{n} L_r$, в соответствии с поведением векторов при преобразованиях из подгруппы U_1. Иначе говоря, подпространство L_r состоит из тех произведений, у которых r частиц находятся в состоянии φ_N, а $n-r$ частиц — в остальных состояниях: от φ_1 до φ_{N-1}. При анализе структуры подпространства L_r мы можем считать, что оно построено из произведений вида

$$\varphi_i(1)\,\varphi_j(2)\ldots\varphi_p(n-r)\,\varphi_N(n-r+1)\ldots\varphi_N(n) \quad (18.10)$$

путем а) всевозможного выбора индексов $i, j, \ldots, p$ из чисел $1, 2, \ldots, N-1$ и б) всевозможных перестановок, которые перемешивают между собой частицы с номерами от 1 до $n-r$ и от $(n-r+1)$ до n. Структура такого произведения подобна структуре произведения (17.24), рассматривавшегося в гл. 17, § 11, где говорилось о внешних произведениях. Шаг «а» совпадает с процедурой построения пространства L (§ 1). Правда, здесь числа n и N заменены числами $n-r$ и $N-1$. Поэтому для частиц с номерами от 1 до $n-r$ мы можем построить представления со всеми схемами Юнга α_{n-r}, составленными из $n-r$ квадратов и содержащими не более $N-1$ строк. Эти схемы Юнга α_{n-r} описывают поведение векторов при преобразованиях как из группы U_{n-1}, так и из группы $\mathscr{S}_{n-r}$. Чтобы установить, как ведут себя произведения (18.10) при преобразованиях из группы $\mathscr{S}_n$, нужно построить внешнее произведение представления α_{n-r} группы $\mathscr{S}_{n-r}$ с полностью симметричным представлением $[r]$ группы $\mathscr{S}_r$, которое соответствует последним r частицам в произведении (18.10). Это возможно как частный случай правила (17.28). Тогда при заданной схеме Юнга α_{n-r} схемы Юнга α_n, связанные с группой $\mathscr{S}_n$, получаются путем добавления r квадратов к схеме α_{n-r} таким

способом, чтобы никакие два добавленных квадрата не лежали в одном столбце. Обратив рассуждения, мы теперь можем вывести разложение (18.9). Таким образом, при заданной схеме Юнга α_n и при заданном числе r все возможные представления группы U_{N-1} соответствуют тем схемам Юнга α_{n-r}, которые можно получить, удалив из схемы α_n r квадратов, лежащих в разных столбцах.

§ 4. СИСТЕМА НУМЕРАЦИИ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ

В гл. 17, § 8 мы применили последовательность подгрупп $\mathcal{S}_{n-1} \to \mathcal{S}_{n-2} \to \ldots \to \mathcal{S}_2$ группы $\mathcal{S}_n$ для построения однозначной системы нумерации базисных векторов неприводимых представлений $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ группы $\mathcal{S}_n$. Такие же рассуждения для последовательности подгрупп $U_{N-1} \to U_{N-2} \to \ldots \to U_1$, рассмотренной в § 3, приводят к однозначной системе нумерации базисных векторов представлений $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$ группы U_N. При такой системе базисные векторы представления $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$ нумеруются последовательностью схем Юнга

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-r_N},\ \alpha_{n-r_N-r_{N-1}},\ \ldots,\ \alpha_{n-r_N-r_{N-1}-\ldots-r_2}, \qquad (18.11)$$

где схема α_{n-r_N} определяет представление подгруппы U_{N-1}, которому принадлежит вектор, схема $\alpha_{n-r_N-r_{N-1}}$ относится к подгруппе U_{N-2} и т. д. Доказательство того, что такая система нумерации однозначна, т. е. что нет двух базисных векторов представления $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$, которые имели бы одинаковые индексы, совершенно аналогично доказательству, приведенному в гл. 17, § 8. Мы не будем повторять его. В качестве примера шести базисным векторам представления $\mathsf{U}^{[2]}$ группы U_3, рассмотренного в § 3, можно сопоставить последовательности разбиений, указанные во втором столбце табл. 18.1.

Последовательность схем Юнга, или разбиений,— это громоздкое обозначение. Как и в гл. 17, § 8, более компактная система нумерации получается, если сопоставить каждому базисному вектору одну схему Юнга α_n, квадратам которой следующим образом приписаны «номера состояний» от 1 до N. Число N ставится в те квадраты схемы α_n, которые отсутствуют в схеме α_{n-r_N}, число $N-1$ — в те квадраты схемы α_{n-r_N}, которые отсутствуют