способом, чтобы никакие два добавленных квадрата не лежали в одном столбце. Обратив рассуждения, мы теперь можем вывести разложение (18.9). Таким образом, при заданной схеме Юнга α_n и при заданном числе r все возможные представления группы U_{N-1} соответствуют тем схемам Юнга α_{n-r}, которые можно получить, удалив из схемы α_n r квадратов, лежащих в разных столбцах.

§ 4. СИСТЕМА НУМЕРАЦИИ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ

В гл. 17, § 8 мы применили последовательность подгрупп $\mathcal{S}_{n-1} \to \mathcal{S}_{n-2} \to \ldots \to \mathcal{S}_2$ группы $\mathcal{S}_n$ для построения однозначной системы нумерации базисных векторов неприводимых представлений $\mathsf{T}^{(\alpha_n)}$ группы $\mathcal{S}_n$. Такие же рассуждения для последовательности подгрупп $U_{N-1} \to U_{N-2} \to \ldots \to U_1$, рассмотренной в § 3, приводят к однозначной системе нумерации базисных векторов представлений $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$ группы U_N. При такой системе базисные векторы представления $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$ нумеруются последовательностью схем Юнга

$$\alpha_n,\ \alpha_{n-r_N},\ \alpha_{n-r_N-r_{N-1}},\ \ldots,\ \alpha_{n-r_N-r_{N-1}-\ldots-r_2}, \qquad (18.11)$$

где схема α_{n-r_N} определяет представление подгруппы U_{N-1}, которому принадлежит вектор, схема $\alpha_{n-r_N-r_{N-1}}$ относится к подгруппе U_{N-2} и т. д. Доказательство того, что такая система нумерации однозначна, т. е. что нет двух базисных векторов представления $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$, которые имели бы одинаковые индексы, совершенно аналогично доказательству, приведенному в гл. 17, § 8. Мы не будем повторять его. В качестве примера шести базисным векторам представления $\mathsf{U}^{[2]}$ группы U_3, рассмотренного в § 3, можно сопоставить последовательности разбиений, указанные во втором столбце табл. 18.1.

Последовательность схем Юнга, или разбиений,— это громоздкое обозначение. Как и в гл. 17, § 8, более компактная система нумерации получается, если сопоставить каждому базисному вектору одну схему Юнга α_n, квадратам которой следующим образом приписаны «номера состояний» от 1 до N. Число N ставится в те квадраты схемы α_n, которые отсутствуют в схеме α_{n-r_N}, число $N-1$ — в те квадраты схемы α_{n-r_N}, которые отсутствуют

Таблица 18.1

$\|11\rangle$	[2], [2], [2]	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$
$(\|12\rangle+\|21\rangle)/\sqrt{2}$	[2], [2], [1]	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$
$\|22\rangle$	[2], [2], [0]	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$
$(\|13\rangle+\|31\rangle)/\sqrt{2}$	[2], [2], [1]	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$
$(\|23\rangle+\|32\rangle)/\sqrt{2}$	[2], [1], [0]	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$
$\|33\rangle$	[2], [0], [0]	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}$

в схеме $\alpha_{n-r_N-r_{N-1}}$, и т. д. Такая система нумерации показана в третьем столбце табл. 18.1. В качестве еще одного примера сопоставим восьми базисным векторам представления [21] группы U_3 таблицы Юнга

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \tag{18.12}$$

Например, первому базисному вектору соответствует последовательность разбиений $[21]\to[21]\to[2]$, шестому — последовательность $[21]\to[11]\to[1]$, а восьмому — последовательность $[21]\to[1]\to[0]$.

Подчеркнем, что для группы U_N способ приписывания номеров состояний совершенно отличен от того способа приписывания номеров частиц, который мы применяли для группы $\mathscr{S}_n$ в гл. 17, § 8.

5. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ U_N

Следуя общему определению гл. 4, § 17, для любых двух представлений $\mathsf{U}^{(\alpha_n)}$ и $\mathsf{U}^{(\alpha'_{n'})}$ группы U_N можно построить прямое произведение. При этом получается представление, размерность которого равна произведению размерностей двух исходных представлений. Нам нужно разложить такое произведение представлений на неприводимые составляющие. Опять мы сначала просто сфор-