ления $\mathsf{T}^{(\beta)}$ группы $\mathscr{S}_{n+n'}$ при ограничении его на подгруппу $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_{n'}$. Рассмотрим пространство L, состоящее из произведений (18.2) для $n+n'$ частиц. Как говорилось в § 1, такое пространство разлагается на неприводимые представления произведения групп $\mathscr{S}_{n+n'} \times U_N$ (они нумеруются разбиениями β числа $n+n'$):

$$\mathsf{T} = \dot{\sum_{\beta}} \mathsf{T}^{(\beta)} \otimes \mathsf{U}^{(\beta)}.$$

Ограничение на подгруппу $\mathscr{S}_n \otimes \mathscr{S}_{n'} \otimes U_N$ приводит в силу соотношения (17.30) к дальнейшему разложению:

$$\mathsf{T} = \dot{\sum_{\beta,\, \alpha_n,\, \alpha'_{n'}}} m(\beta;\, \alpha_n,\, \alpha'_{n'})\, \mathsf{T}^{(\alpha_n)} \otimes \mathsf{T}^{(\alpha'_{n'})} \otimes \mathsf{U}^{(\beta)}. \qquad (18.15)$$

Рассматривая по отдельности первые n и последние n' частиц и применяя к каждой из этих групп частиц выражение (18.7), мы также приходим к разложению

$$\mathsf{T} = \dot{\sum_{\alpha_n,\, \alpha'_{n'}}} \mathsf{T}^{(\alpha_n)} \otimes \mathsf{U}^{(\alpha_n)} \otimes \mathsf{T}^{(\alpha'_{n'})} \otimes \mathsf{U}^{(\alpha'_{n'})}. \qquad (18.16)$$

Наконец, сравнивая это выражение с предыдущим, мы получаем желаемое разложение произведения представлений группы U_N:

$$\mathsf{U}^{(\alpha_n)} \otimes \mathsf{U}^{(\alpha'_{n'})} = \dot{\sum_{\beta}} m(\beta;\, \alpha_n,\, \alpha'_{n'})\, \mathsf{U}^{(\beta)}.$$

6. ОГРАНИЧЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ С ГРУППЫ U_N НА ЕЕ ПОДГРУППУ SU_N

Неприводимые представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ группы U_N строились в § 1 из произведений типа (18.2), причем индекс α означал разбиение числа n, т. е. разбиение числа сомножителей в произведении. В данном параграфе мы рассмотрим подгруппу, состоящую из всех унитарных $N \times N$-матриц, определитель которых равен единице. Она обозначается символом SU_N и называется «специальной унитарной группой» или «унимодулярной группой». Соотношение между группами U_N и SU_N лучше всего характеризуется тем, что группу U_N можно представить в виде прямого произведения $U_1 \times SU_N$, где U_1 — группа $N \times N$-матриц, пропо-

рциональных единичной матрице с коэффициентом пропорциональности $\exp(-i\psi)$, причем ψ — действительное число. (Эта группа U_1 не совпадает с рассмотренной в § 3 группой U_1, действующей лишь на одномерном подпространстве нашего N-мерного пространства, хотя, конечно, эти группы изоморфны.)

Если A и B — квадратные матрицы, то выполняется простое соотношение $\det \mathsf{AB} = (\det \mathsf{A})(\det \mathsf{B})$. Поэтому из условия унитарности $\mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger = 1$ матрицы U следует, что $|\det U|^2 = 1$. Следовательно, любую унитарную матрицу U можно представить в виде $\mathsf{U} = \exp(-i\psi)\bar{\mathsf{U}}$, где $\det \bar{\mathsf{U}} = +1$. Как нетрудно убедиться, множество всех унитарных $N \times N$-матриц $\bar{\mathsf{U}}$ с $\det \bar{\mathsf{U}} = 1$ образует группу. Значит, группа U_N распадается на группу U_1 множителей вида $\exp(-i\psi)$ и на группу $\bar{\mathsf{U}}$, которую мы назвали группой SU_N.

Из общей теории представлений произведения групп (гл. 4, § 21) мы знаем, что неприводимые представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ группы U_N должны иметь вид прямого произведения неприводимых представлений групп U_1 и SU_N. Представления группы U_1, конечно, одномерны и имеют вид $\exp(-im\psi)$, где m — любое целое число. Так как представление $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ в § 1 строилось из n сомножителей, оно имеет вид

$$\mathsf{U}^{(\alpha)} = \exp(-in\psi) \otimes \mathsf{U}^{(\tilde{\alpha})}, \tag{18.17}$$

где n — число квадратов в схеме Юнга α. Значит, неприводимое представление $\mathsf{U}^{(\tilde{\alpha})}$ группы SU_N имеет ту же размерность, что и представление $\mathsf{U}^{(\alpha)}$. Иначе говоря, представление $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ не разлагается при ограничении его с группы U_N на подгруппу SU_N. Поэтому для нумерации неприводимых представлений группы SU_N мы можем использовать те же разбиения $(\tilde{\alpha}) = (\alpha) = [n_1 n_2 \ldots]$. Два представления группы U_N, отвечающие разным n, очевидно, не эквивалентны. Для группы SU_N, как сейчас мы докажем, это не так.

Рассмотрим представление $[11\ldots1]$ группы U_N при $n = N$. Оно должно быть одномерным, так как из произведений (18.2) можно построить единственную полностью антисимметричную комбинацию, а именно

$$\Psi = \sum_{\mathsf{P}} \pi(\mathsf{P})\,\mathsf{P}\,\varphi_1(1)\,\varphi_2(2)\ldots\varphi_N(N), \tag{18.18}$$

где суммирование идет по всем перестановкам номеров частиц, а $\pi(\mathsf{P})$ — это четность перестановки P. В силу формулы (18.3) унитарное преобразование действует на вектор Ψ следующим образом:

$$\mathsf{T}(\mathsf{U})\Psi = \sum_{ij\ldots p} U_{i1}U_{j2}\ldots U_{pN}\sum_{\mathsf{P}}\pi(\mathsf{P})\mathsf{P}\varphi_i(1)\varphi_j(2)\ldots\varphi_p(N). \tag{18.19}$$

Из-за наличия оператора антисимметризации ненулевой вклад дают лишь те комбинации $ij\ldots p$, которые не содержат повторяющихся индексов, т. е. комбинации $ij\ldots p$, представляющие собой перестановки чисел $12\ldots N$. Обозначим через $\begin{pmatrix} ij\ldots p \\ 12\ldots N \end{pmatrix}$ перестановку, которая частицы с номерами $ij\ldots p$ переводит в частицы с номерами $12\ldots N$. Выражение (18.19) можно переписать в виде

$$\mathsf{T}(\mathsf{U})\Psi = \sum_{ij\ldots p} U_{i1}U_{i2}\ldots U_{pN}\sum_{\mathsf{P}}\pi(\mathsf{P})\mathsf{P}\times \\ \times\begin{pmatrix} ij\ldots p \\ 12\ldots N \end{pmatrix}\varphi_i(i)\varphi_j(j)\ldots\varphi_p(p).$$

Напомним, что перестановка $\begin{pmatrix} ij\ldots p \\ 12\ldots N \end{pmatrix}$, как и перестановка P, действует лишь на номера частиц. Поскольку порядок сомножителей несуществен, их можно расположить в таком порядке, чтобы множитель $\varphi_1(1)$ был первым, множитель $\varphi_2(2)$ — вторым и т. д. Тогда в силу того, что четность произведения перестановок равна произведению четностей перестановок (гл. 17, § 4), получаем

$$\mathsf{T}(\mathsf{U})\Psi = \sum_{ij\ldots p} U_{i1}U_{j2}\ldots U_{pN}\sum_{\mathsf{P}}\pi(\mathsf{P})\mathsf{P}\begin{pmatrix} ij\ldots p \\ 12\ldots N \end{pmatrix}\varphi_1(1)\times \\ \times\varphi_2(2)\ldots\varphi_N(N) = \sum_{ij\ldots p} U_{i1}U_{j2}\ldots U_{pN}\pi\begin{pmatrix} 12\ldots N \\ ij\ldots p \end{pmatrix}\times \\ \times\sum_{\mathsf{P}'}\pi(\mathsf{P}')\mathsf{P}'\varphi_1(1)\varphi_2(2)\ldots\varphi_N(N),$$

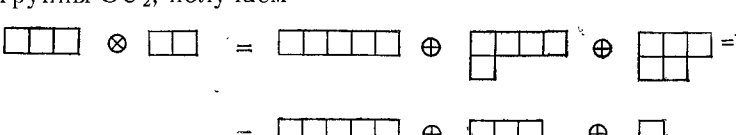
где перестановка P' определяется как произведение перестановок: $\mathsf{P}' = \mathsf{P}\begin{pmatrix} ij\ldots p \\ 12\ldots N \end{pmatrix}$. Мы воспользовались также тем, что, когда перестановки P пробегают группу $\mathscr{S}_N$, перестановки P' тоже пробегают эту группу (т. 1, гл. 2, § 9).

Наконец, заметим, что сумма по перестановкам P' совпадает с вектором Ψ, а сумма по индексам $ij...p$ — с определителем матрицы U Значит,

$$\mathsf{T}(\mathsf{U})\Psi=(\det\mathsf{U})\Psi. \qquad (18.20)$$

Смысл равенства (18.20) заключается в том, что вектор Ψ остается неизменным при преобразовании из группы SU_N. Таким образом, мы доказали эквивалентность представления, отвечающего разбиению [11...1] числа $n=N$, тривиальному представлению, отвечающему просто $n=0$. Это означает эквивалентность схемы Юнга в виде одного столбца из N строк тривиальной схеме, в которой нет ни одного квадрата. Теперь на основании результатов § 5 можно доказать эквивалентность и других представлений. Если $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ — любое неприводимое представление, то по правилам построения коэффициентов разложения (18.13) имеем $\mathsf{U}^{(\alpha)}\otimes\mathsf{U}^{[11\ldots1]}=\mathsf{U}^{(\beta)}$, где схема Юнга β получается из схемы Юнга α добавлением слева полного столбца. Так как представление $\mathsf{U}^{[11\ldots1]}$ эквивалентно тривиальному, можно написать $\mathsf{U}^{(\alpha)}\equiv\mathsf{U}^{(\beta)}$. Значит, добавляя или вычитая один полный столбец (или несколько), получаем эквивалентное представление. Можно показать, что других эквивалентных представлений нет. Неэквивалентные неприводимые представления обычно обозначаются схемами Юнга с минимальным числом квадратов. Они получаются путем вычитания всех полных столбцов длиной N. Поэтому в случае группы SU_N нам нужны лишь схемы Юнга с числом строк не более $N-1$.

Разложение произведения представлений группы SU_N можно получить из разложения (18.13) для группы U_N, учитывая отмеченную выше эквивалентность представлений. Например, для группы SU_2 схемы Юнга представлений имеют лишь одну строку, и, применяя разложение (18.13) к произведению представлений $\mathsf{U}^{[3]}\otimes\mathsf{U}^{[2]}$ группы SU_2, получаем



В более привычных обозначениях $\mathsf{D}^{(J)}$, которые в гл. 7 и

10 применялись для представлений группы SU_2, это соотношение представляет собой пример разложения (7.44):

$$\mathsf{D}^{(3/2)}\otimes\mathsf{D}^{(1)}=\mathsf{D}^{(5/2)}\oplus\mathsf{D}^{(3/2)}\oplus\mathsf{D}^{(1/2)}.$$

Здесь мы использовали эквивалентность представлений $\mathsf{U}^{[n]}$ и $\mathsf{D}^{(1/2 n)}$, о которой будет сказано в следующем параграфе.

§ 7. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ: ГРУППЫ SU_2, SU_3 и SU_4

Сопоставим теперь сказанное выше о группе SU_N с частными описаниями групп SU_2, SU_3 и SU_4 в гл. 10—12. В случае группы SU_2 неприводимые представления нумеруются схемами Юнга с одной строкой длиной n, т. е. они нумеруются одним целым числом n. Но в гл. 10 мы для неприводимых представлений группы SU_2 применяли обозначение $\mathsf{D}^{(j)}$, где $j=0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$, поскольку группа SU_2 гомоморфна группе $\mathscr{R}_3$ (см. также § 13). Оба подхода объединяются соотношением $j={}^1/_2 n$. Это соотношение можно вывести разными способами. Один из них основан на том, что число j в представлении $\mathsf{D}^{(j)}$ соответствует максимальному значению инфинитезимального оператора J_z, который в исходном двумерном пространстве представляется матрицей $\begin{pmatrix} {}^1/_2 & 0 \\ 0 & -{}^1/_2 \end{pmatrix}$. На произведении Φ типа (18.2) такой инфинитезимальный оператор диагонален, а его значение складывается из вкладов $+{}^1/_2$, которые дают все частицы в состоянии φ_1, и вкладов $-{}^1/_2$, которые дают все частицы в состоянии φ_2. Поэтому наибольшее значение инфинитезимальный оператор имеет в том случае, когда максимально возможное число из n частиц находится в состоянии φ_1. В случае полностью симметричных функций, соответствующих схеме Юнга $[n]$ с одной строкой, это число, очевидно, равно n, т. е. $j={}^1/_2 n$. Таким образом, целочисленность числа n приводит к тому, что число j либо целое, либо полуцелое.

Путем аналогичных рассуждений можно установить соответствие между индексами $(\lambda\mu)$, которыми обозначались в гл. 11 неприводимые представления группы SU_3, и схемами Юнга $[n_1 n_2]$ с двумя строками, причем $n_1=\lambda+\mu$, $n_2=\mu$. Напомним (гл. 11), что число ${}^1/_3(\lambda+2\mu)$ — это наибольшее значение инфинитезимального оператора Y, который в исходном трехмерном пространстве представляется