и с учетом эквивалентностей для группы SU_3 равенство (11.11) является следствием равенства (17.29).

Для группы SU_4, которая использовалась при обсуждении ядерной структуры в гл. 12, мы также можем связать индексы $(PP'P'')$ с разбиением. В этом случае достаточно разбиения $[n_1n_2n_3]$ с тремя строками. Напомним, что индексы P, P' и P'' связаны с максимальными значениями инфинитезимальных операторов S_z, T_z и Y_{zz}, которые в исходном четырехмерном пространстве величин $p\uparrow$, $n\uparrow$, $p\downarrow$, $n\downarrow$ (см. обозначения в гл. 12, § 1) представляются матрицами

$$\mathsf{S}_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \mathsf{T}_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\mathsf{Y}_{zz}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Из вида этих матриц явствует, что линейные комбинации $\mathsf{S}_z+\mathsf{T}_z$, $\mathsf{S}_z-\mathsf{Y}_{zz}$ и $\mathsf{T}_z-\mathsf{Y}_{zz}$ — это операторы разности чисел частиц в состояниях φ_1 и φ_4, φ_2 и φ_4, φ_3 и φ_4. Так как для построения функции, соответствующей разбиению с тремя строками, не требуется, чтобы какие-либо частицы находились в состоянии φ_4, мы имеем $P+P'=n_1$, $P-P''=n_2$ и $P'-P''=n_3$. Обращаясь к примерам, содержащимся в формуле (12.6), получаем соотношения

$$\mathsf{D}^{(3/2\,3/2\,3/2)}\equiv\mathsf{U}^{[3]},\ \mathsf{D}^{(3/2\,1/2\,1/2)}\equiv\mathsf{U}^{[21]},\ \mathsf{D}^{(1/2\,1/2\,-1/2)}\equiv\mathsf{U}^{[111]},$$

которые согласуются с соотношением (12.5).

§ 8. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГРУППЫ U_N

Возвращаясь к группе U_N, заметим, что в исходном N-мерном пространстве существуют N^2 инфинитезимальных операторов, соответствующих N^2 независимым эрмитовым $N\times N$-матрицам. Для удобства выберем из них N диагональных матриц, все матричные элементы которых

равны нулю, кроме одного диагонального матричного элемента, равного $+1$. Обозначим такие операторы символом H_i, где $i=1, \ldots, N$. Из оставшихся $N(N-1)$ операторов можно построить линейные комбинации, подобные операторам $\mathsf{T}_\pm$, $\mathsf{U}_\pm$, $\mathsf{V}_\pm$ в формуле (11.2); при этом получается $^1/_2 N(N-1)$ пар повышающих и понижающих операторов E_{ij} и E_{ji}, все матричные элементы которых равны нулю, кроме ij-го в случае операторов E_{ij} и ji-го в случае операторов E_{ji} недиагональных матричных элементов, равных $+1$. Такие операторы переводят частицу из состояния φ_i в состояние φ_j, т. е. $\mathsf{E}_{ji}\varphi_k=\delta_{ik}\varphi_j$.

Найдем матрицы этих операторов в произвольном неприводимом представлении $\mathsf{U}^{(\alpha)}$. Прежде всего, операторы H_i коммутируют между собой и являются инфинитезимальными операторами группы $U_1\times U_1\times\ldots\times U_1$, которая состоит из N подгрупп U_1, соответствующих каждому измерению. Из результатов § 3 следует, что в базисе векторов § 4 матрицы $\mathsf{H}_i^{(\alpha)}$ операторов H_i в представлении $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ будут диагональны. Собственное значение матрицы $\mathsf{H}_i^{(\alpha)}$ на таком базисном векторе равно r_i (см. обозначения в § 4). Набор чисел $(r_1 r_2 \ldots r_N)$ называется «весом» базисного вектора. Например, восемь базисных векторов, заданных диаграммами (18.12), имеют следующие веса (записанные в том же порядке):

$$(210)\,(120)\,(201)\,(111)\,(021)\,(111)\,(102)\,(012). \qquad (18.21)$$

Заметим, что в отличие от последовательности схем Юнга, рассмотренной в § 4, веса не дают однозначной системы нумерации. Все возможные веса удобно располагать в таком порядке, чтобы вес $(r_1' r_2' \ldots r_N')$ считался старше веса $(r_1 r_2 \ldots r_N)$, если $r_1' > r_1$. Если же $r_1'=r_1$, то упорядочение идет по значениям чисел r_2' и r_2 и т. д. Так, старшим весом в наборе (18.21) будет вес (210). Из определения чисел r_i видно, что старший вес произвольного неприводимого представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, где $\alpha\equiv[n_1 n_2 \ldots]$, совпадает с самим разбиением, т. е. $r_1=n_1$, $r_2=n_2$ и т. д. Значит, старший вес может служить индексом представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$. Этот вывод включает в себя как частный случай то обстоятельство, что для нумерации неприводимых представлений $\mathsf{D}^{(j)}$ группы $\mathcal{R}_3$ используется максимальное из чисел $m\,(=j)$.

Матрицы повышающего и понижающего операторов можно найти, обобщив метод гл. 4, § 4, п. Б и воспользовавшись также последовательностью подгрупп. Мы не будем на этом останавливаться.

§ 9. КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП U_N И SU_N

Каждому представлению $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ группы U_N соответствует комплексно-сопряженное представление $\mathsf{U}^{(\alpha)*}$, которое получается путем комплексного сопряжения всех матричных элементов представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$. В частности, в случае инфинитезимальных операторов это означает, что веса представления $\mathsf{U}^{(\alpha)*}$ противоположны по знаку весам представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$. Отсюда явствует, что представление $\mathsf{U}^{(\alpha)*}$ не может совпадать с каким-либо представлением $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, определенным в § 1, так как его веса должны быть положительны.

Следовательно, представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, описываемые всевозможными разбиениями α чисел n, не образуют полной системы. Но можно показать, что полная система неприводимых представлений группы U_N задается представлениями $(\det \mathsf{U})^{-l}\mathsf{U}^{(\alpha)}$, где l — любое положительное целое число. Из сказанного в § 6 вытекает, что добавление простого множителя $(\det \mathsf{U})^{-l}$ дает другое представление, причем если $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ — вес представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, то $(r_1-l, r_2-l, \ldots, r_N-l)$ — вес представления $(\det \mathsf{U})^{-l}\mathsf{U}^{(\alpha)}$. Чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть бесконечно малое преобразование $\mathsf{U}=1+ia_i\mathsf{H}_i$, соответствующее инфинитезимальному оператору H_i и малому параметру a_i. Тогда $(\det \mathsf{U})^{-l}=(1+ia_i)^{-l}\approx 1-ila_i$. По определению инфинитезимального оператора $\mathsf{H}_i^{(\alpha)}$ в представлении $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ мы имеем $\mathsf{U}^{(\alpha)}=1+ia_i\mathsf{H}_i^{(\alpha)}$. Значит, при малом параметре a_i имеем

$$(\det \mathsf{U})^{-l}\mathsf{U}^{(\alpha)}=1+ia_i(\mathsf{H}_i^{(\alpha)}-l), \tag{18.22}$$

откуда следует желаемый результат.

Применяя эту расширенную систему неприводимых представлений, мы можем для комплексно-сопряженного представления доказать эквивалентность

$$\mathsf{U}^{(\alpha)*}\equiv(\det \mathsf{U})^{-n}\,\mathsf{U}^{(\beta)}, \tag{18.23}$$