Матрицы повышающего и понижающего операторов можно найти, обобщив метод гл. 4, § 4, п. Б и воспользовавшись также последовательностью подгрупп. Мы не будем на этом останавливаться.

§ 9. КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП U_N И SU_N

Каждому представлению $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ группы U_N соответствует комплексно-сопряженное представление $\mathsf{U}^{(\alpha)*}$, которое получается путем комплексного сопряжения всех матричных элементов представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$. В частности, в случае инфинитезимальных операторов это означает, что веса представления $\mathsf{U}^{(\alpha)*}$ противоположны по знаку весам представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$. Отсюда явствует, что представление $\mathsf{U}^{(\alpha)*}$ не может совпадать с каким-либо представлением $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, определенным в § 1, так как его веса должны быть положительны.

Следовательно, представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, описываемые всевозможными разбиениями α чисел n, не образуют полной системы. Но можно показать, что полная система неприводимых представлений группы U_N задается представлениями $(\det \mathsf{U})^{-l}\mathsf{U}^{(\alpha)}$, где l — любое положительное целое число. Из сказанного в § 6 вытекает, что добавление простого множителя $(\det \mathsf{U})^{-l}$ дает другое представление, причем если $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ — вес представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, то $(r_1 - l, r_2 - l, \ldots, r_N - l)$ — вес представления $(\det \mathsf{U})^{-l}\mathsf{U}^{(\alpha)}$. Чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть бесконечно малое преобразование $\mathsf{U} = 1 + ia_i\mathsf{H}_i$, соответствующее инфинитезимальному оператору H_i и малому параметру a_i. Тогда $(\det \mathsf{U})^{-l} = (1 + ia_i)^{-l} \approx 1 - ila_i$. По определению инфинитезимального оператора $\mathsf{H}_i^{(\alpha)}$ в представлении $\mathsf{U}^{(\alpha)}$ мы имеем $\mathsf{U}^{(\alpha)} = 1 + ia_i\mathsf{H}_i^{(\alpha)}$. Значит, при малом параметре a_i имеем

$$(\det \mathsf{U})^{-l}\mathsf{U}^{(\alpha)} = 1 + ia_i(\mathsf{H}_i^{(\alpha)} - l), \qquad (18.22)$$

откуда следует желаемый результат.

Применяя эту расширенную систему неприводимых представлений, мы можем для комплексно-сопряженного представления доказать эквивалентность

$$\mathsf{U}^{(\alpha)*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-n_1}\mathsf{U}^{(\beta)}, \qquad (18.23)$$

где индекс α, как обычно, обозначает разбиение $\alpha = [n_1 n_2 \ldots n_N]$, а $\beta = [n_1 - n_N,\ n_1 - n_{N-1},\ \ldots,\ n_1 - n_2,\ 0]$. Схема Юнга β сразу получается из схемы Юнга α путем вычитания схемы α из четырехугольной схемы с n_1 столбцами и N строками, как показано на рис. 18.1. (Напомним, что некоторые числа n_i могут быть равными нулю и первая строка схемы β совпадает с последней строкой рисунка и т. д.)

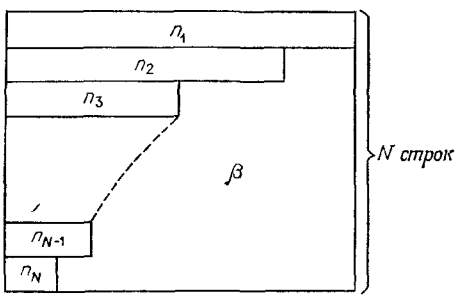

Рис. 18.1.

Прежде чем доказать эту эквивалентность, приведем несколько примеров:

$N = 2$ $\quad \mathsf{U}^{[1]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-1} \mathsf{U}^{[1]}$, $\mathsf{U}^{[2]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-2} \mathsf{U}^{[2]}$, $\mathsf{U}^{[11]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-1} \mathsf{U}^{[0]}$,

$\mathsf{U}^{[21]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-2} \mathsf{U}^{[1]}$,

$N = 3$ $\quad \mathsf{U}^{[1]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-1} \mathsf{U}^{[11]}$, $\mathsf{U}^{[2]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-2} \mathsf{U}^{[22]}$,

$\mathsf{U}^{[11]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-1} \mathsf{U}^{[1]}$,

$\mathsf{U}^{[21]*} \equiv (\det \mathsf{U})^{-2} \mathsf{U}^{[21]}$.

Выражение (18.23) неоднозначно, так как в силу сказанного в § 6 при добавлении к схеме β полного столбца и одновременном включении в выражение дополнительного множителя $(\det \mathsf{U})^{-1}$ выражение не меняется. Эквивалентность (18.23) можно доказать, показав, что обе части равенства имеют одинаковую систему весов. Например, старшим весом левой части будет вес $(-n_N,\ -n_{N-1},\ \ldots,\ -n_2,\ -n_1)$. Он соответствует минимальному весу представления $\mathsf{U}^{(\alpha)}$, а именно весу $(n_N,\ n_{N-1},\ \ldots,\ n_2,\ n_1)$. По построению старшим весом представления $\mathsf{U}^{(\beta)}$ будет вес $(n_1 - n_N,\ n_1 - n_{N-1},\ \ldots,\ n_1 - n_2,\ 0)$ [см. определение, следующее за формулой (18.23)]. В завершение доказа-

тельства воспользуемся тем, что системой весов определяется представление.

В случае группы SU_N свойство $\det U = 1$ приводит к значительно более простой эквивалентности $U^{(\alpha)*} \equiv U^{(\beta)}$, где схемы β и α связаны между собой так же, как и раньше. Вспоминая также эквивалентности, о которых говорилось в § 6, мы видим, что для группы SU_2 есть эквивалентность $U^{[n]*} \equiv U^{[n]}$, т. е. все представления группы SU_2 и, следовательно, группы $\mathcal{R}_3$ самосопряженные. Приняв для представлений группы SU_3 обозначение $(\lambda\mu)$, мы получаем общий результат

$$(\lambda\mu)^* \equiv \begin{array}{|c|}\hline \lambda+\mu \\ \hline \mu \\ \hline \end{array}^{\,*} \equiv \begin{array}{|c|}\hline \lambda+\mu \\ \hline \lambda \\ \hline \end{array} \equiv (\mu\lambda),$$

В частности, $(10)^* = (01)$, а представление (11) будет самосопряженным.

§ 10. ПРИМЕНЕНИЕ ГРУППЫ U_N К КЛАССИФИКАЦИИ МНОГОЧАСТИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Представления группы U_N мы вводили с помощью произведений типа Ф в формуле (18.2). Поэтому неудивительно, что группа U_N играет важную роль при построении волновых функций для системы нескольких валентных электронов в атоме. Рассмотрим n валентных электронов, которые находятся в одночастичных состояниях φ_{lm} с фиксированным индексом l. Как обычно, индекс m может принимать значения $m = l, (l-1), \ldots, -l$. В силу сказанного в § 1 построенные из произведений волновые функции, симметрия которых относительно перестановок описывается разбиением $\alpha = [n_1, n_2 \ldots]$ числа n, будут также преобразовываться по неприводимому представлению $U^{(\alpha)}$ группы U_{2l+1} всех унитарных преобразований $(2l+1)$ одночастичных состояний φ_{lm}. Принцип Паули требует, чтобы волновая функция была полностью антисимметричной по отношению к перестановкам частиц. Но разбиение α относится лишь к орбитальным координатам. Поэтому разбиение α необязательно совпадает с разбиением $[11\ldots1]$, но в комбинации со спиновой частью волновой функции оно должно давать такое разбиение. Эта задача уже рассматривалась в гл. 8, § 6.