

двуихчастичной конфигурации  $l^2$  все симметричные состояния (т. е. состояния с четным угловым моментом  $L$  и с  $S=0$ ) обладают одинаковой энергией, а все антисимметричные состояния (т. е. состояния с нечетным угловым моментом  $L$  и с  $S=1$ ) имеют одно и то же, но не совпадающее с предыдущим значение энергии. Отсюда следует, что гамильтониан должен быть инвариантным относительно группы  $U_{2l+1}$ . С физической точки зрения этим оправдывается применение группы, хотя на практике энергетическое расстояние между уровнями, соответствующими разным угловым моментам  $L$ , довольно велико. То же самое относится и к упомянутым выше (см. также гл. 12, § 1) задачам о ядерной структуре.

## § 11. ХАРАКТЕРЫ

В двух следующих параграфах данной главы мы опять рассмотрим математические свойства группы  $U_N$ . Мы вычислим характеры неприводимых представлений и изложим процедуру интегрирования по объему группы. Нам эти результаты практически не нужны, но они существенны в некоторых доказательствах, которые мы опустили, и, кроме того, они дают еще одну связь со сказанным о группе  $\mathcal{R}_3$  в гл. 7.

Для отыскания характеров определим сначала классы сопряженных элементов группы  $U_N$ , так как характер неприводимого представления связан с классами сопряженных элементов (гл. 4, § 9). Любую заданную унитарную матрицу  $U$  можно привести к диагональной форме  $W$  путем унитарного преобразования  $V$ :  $VUV^{-1} = W$ . Значит, матрица  $U$  лежит в том же классе сопряженных элементов, что и диагональная матрица  $W$ , и требуется лишь рассмотреть характеры диагональных матриц. Поскольку матрица  $U$  унитарна, диагональные матричные элементы имеют вид  $\exp(-i\theta)$ , т. е. для определения диагональной унитарной матрицы требуется лишь  $N$  действительных параметров  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ , которые меняются в интервале от 0 до  $2\pi$ . (В случае  $SU_N$  есть дополнительное условие  $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N = 0$ .) Следовательно, хотя группа  $U_N$  имеет  $N^2$  параметров, ее характер зависит лишь от  $N$  параметров. Этим свойством обладает и рассмотренная в гл. 7 группа  $\mathcal{R}_3$ , характер которой является функцией

лишь угла поворота и не зависит от двух других параметров, определяющих ось вращения.

Рассмотрим теперь представление  $\mathbf{U}^{(\alpha)}$ . В базисе, указанном в § 4, матрица диагонального элемента группы  $U_N$  в представлении  $\mathbf{U}^{(\alpha)}$  будет также диагональна, а матричный элемент, соответствующий базисному вектору с весом  $(r_1 r_2 \dots r_N)$ , будет равен

$$\exp\left(-i \sum_{j=1}^N r_j \theta_j\right).$$

Поэтому характер  $\chi^{(\alpha)}$  представления  $\mathbf{U}^{(\alpha)}$  имеет вид

$$\chi^{(\alpha)} = \sum_{r_1 r_2 \dots r_N} \exp\left(-i \sum_{j=1}^N r_j \theta_j\right), \quad (18.28)$$

где суммирование проводится по всем весам представления  $\alpha$ , о которых говорилось в § 4. Путем алгебраических преобразований эту сумму можно представить в виде отношения двух определителей

$$\chi^{(\alpha)} = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1^{n_1+N-1} & \varepsilon_1^{n_2+N-2} & \dots & \varepsilon_1^{n_N} \\ \varepsilon_2^{n_1+N-1} & \varepsilon_2^{n_2+N-2} & \dots & \varepsilon_2^{n_N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \varepsilon_N^{n_1+N-1} & & \dots & \varepsilon_N^{n_N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon_1^{N-1} & \varepsilon_1^{N-2} & \dots & 1 \\ \varepsilon_2^{N-1} & \varepsilon_2^{N-2} & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \varepsilon_N^{N-1} & & \dots & 1 \end{vmatrix}}, \quad (18.29)$$

где  $\varepsilon_j = \exp(-i\theta_j)$ .

В качестве простой иллюстрации этого общего результата возьмем  $N=2$  и разбиение  $\alpha=[n]$  с одной лишь строкой. Все возможные веса имеют вид  $(n0), (n-1, 1), \dots$

$\dots, (0, n)$ . Тогда из выражения (18.28) получаем

$$\begin{aligned} \chi^{(n)} &= \exp(-in\theta_1) + \exp[-i(n-1)\theta_1 - i\theta_2] + \dots \\ \dots + \exp(-in\theta_2) &= \exp\left[-\frac{1}{2}in(\theta_1 + \theta_2)\right] \times \\ &\times \sin\left\{\frac{1}{2}(n+1)(\theta_1 - \theta_2)\right\} / \sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Этот результат следует также из формулы (18.29). При ограничении на группу  $SU_2$  полагаем  $\theta_1 + \theta_2 = 0$ . Тогда это выражение сводится к знакомому выражению (7.42) с  $n = 2j$ .

## § 12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ГРУППЕ И ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Согласно общей теории, изложенной в гл. 4, при интегрировании по групповым параметрам для характеров неприводимых представлений группы  $U_N$  должны получаться соотношения ортогональности. Поскольку характер — это функция на классах сопряженных элементов, необходимо интегрировать лишь по параметрам  $\theta_i$ , которыми различаются классы сопряженных элементов. Тогда в силу формулы (4.25) и сказанного в гл. 7, § 1 должно получиться соотношение типа

$$\int \chi^{(\alpha)*}(\theta) \chi^{(\beta)}(\theta) \rho(\theta) d\theta = \delta_{\alpha\beta} V, \quad (18.30)$$

где  $\theta$  — множество параметров  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ , а  $d\theta \equiv d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_N$ . Областью интегрирования для каждого угла  $\theta_i$  будет интервал от 0 до  $2\pi$ . Объем  $V$  определяется как  $V = \int \rho(\theta) d\theta$ . Осталось, пользуясь результатами приложения 4, § 3, определить подходящий весовой множитель  $\rho(\theta)$ . Прежде чем проводить вычисления, мы приведем результат:  $\rho(\theta) = |\Delta|^2$ , где  $\Delta$  — знаменатель в выражении (18.29).

Доказательство этого результата мы начнем с равенства (П4.15). Нужно вычислить якобиан  $(\partial c / \partial a)_{a=0}$ , где через  $a$  и  $c$  обозначены  $N^2$  параметров унитарных преобразований, и  $U(c) = U(a)U(b)$ . Для произвольной унитарной матрицы  $U$  в качестве  $N$  параметров мы возьмем углы  $\theta_i$ , которые получались в § 11 при диагонализации матрицы  $U$ . Оставшимися  $N^2 - N$  параметрами определяется матрица, которая приводит матрицу  $U$  к диаго-