Приравнивая это выражение выражению $(\cos {}^1/_2 c + 2\mathbf{m}\cdot \mathbf{X} \sin {}^1/_2 c)$, мы из двух уравнений находим угол c и ось $\mathbf{m}$.

Д. Примеры базисных векторов для представлений группы SU_2

Введем для произвольного вектора $\mathbf{e}$ в двумерном пространстве, где действует группа SU_2, координаты ξ, η. Тогда в силу формулы (3.38) преобразование функций определяется равенством $\mathbf{T}(\mathbf{U})\,\psi(\xi, \eta) = \psi(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, причем, учитывая выражения (3.39) и (18.32), имеем

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \alpha^* \xi - \beta \eta, \\ \bar{\eta} &= \beta^* \xi + \alpha \eta. \end{aligned} \tag{18.39}$$

Посмотрим, как преобразуются следующие $2j+1$ функций:

$$\xi^{2j},\ \xi^{2j-1}\eta,\ \xi^{2j-2}\eta^2,\ \ldots,\ \xi\eta^{2j-1},\ \eta^{2j}. \tag{18.40}$$

Поскольку преобразование (18.39) линейно, это множество функций образует инвариантное пространство и, следовательно, $(2j+1)$-мерное представление группы SU_2. В случае унитарного преобразования, соответствующего повороту на угол a вокруг оси z, параметры α и β имеют вид $\alpha = \exp(-{}^1/_2 ia)$ и $\beta = 0$. В этом случае преобразование (18.39) очень простое, а характер представления, задаваемого множеством функций (18.40), имеет вид $(\alpha^*)^{2j} + (\alpha^*)^{2j-1}\alpha + \ldots + \alpha^{2j} = \exp(iaj) + \exp[ia(j-1)] + \ldots + \exp(-iaj)$. Сравнивая с соответствующим выражением(7.42), видим, что наш характер совпадает с характером неприводимого представления $\mathbf{D}^{(j)}$ группы $\mathcal{R}_3$. Таким образом, мы приходим к выводу, что множество функций (18.40) образует базис представления $\mathbf{D}^{(j)}$ группы SU_2. В частности, три функции ξ^2, $\xi\eta$ и η^2 образуют базис векторного представления $\mathbf{D}^{(1)}$.

ЛИТЕРАТУРА [1])

Подробности относительно группы U_N можно найти в книге Бернера (см. литературу к гл. 4) или в книге Литлвуда (литература к гл. 17, [4]), а также в книге:

[1]) Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе.—*Прим. ред.*

1*. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления.—М.: Наука, 1970.

Более подробное обсуждение приложений к спектроскопии тонких структур, которые рассматривались в § 10, можно найти в работе Джадда (литература к гл. 8, [3]). Обзор по приложениям к исследованию ядерной структуры дан в работе:

2. *Hecht K. T.*, Symmetry in Nuclei: Annual reviews of nuclear science, Annual Reviews Inc., Palo Alto, California, 1973.

Значительно более ранние исследования по применению унитарных групп и их подгрупп к спектроскопии были проведены Рака. Одно из них изложено в его работе:

3. *Racah G.*, Ergebn. exakt. Naturw., **37**, 28 (1965).

ЗАДАЧИ

18.1. Постройте произведение функций, принадлежащих представлениям [3], [21] и [111] группы U_3, так, как предлагается в § 2, пример 4.

18.2. Методом, изложенным в § 4, установите нумерацию базисных векторов следующих представлений: а) [3] группы U_3; б) [21] группы U_4.

18.3. Разложите прямое произведение $[31]\otimes[2]$ представлений группы U_3. Покажите, как упрощается этот результат, если вместо группы U_3 использовать: а) группу SU_3 [введите обозначение (λ, μ)]; б) группу SU_2.

18.4. Вычислите веса базисных векторов для представления из части «а» задачи 2. Покажите, что в этом случае разложение (18.24) имеет вид $U^{[3]} = D^{(3)} \oplus D^{(1)}$.

18.5. Найдите значения углового момента L для полностью антисимметричных состояний двух и трех d-частиц. (Существует лишь одно антисимметричное состояние при каждой комбинации разных значений m проекций угловых моментов частиц. Найдите число независимых состояний при каждом значении $M = \sum m$ и вычислите возможные значения углового момента L.)

18.6. Разложите произведения $[1]\otimes[1]$, $[1]\otimes[11]$ и $[1]\otimes[2]$ представлений группы U_5. Затем, зная разложение произведения представлений (7.44) для группы $\mathcal{R}_3$ и зная ответы предыдущей задачи, вычислите путем вычитания угловой момент L для представлений [2], [3] и [21] двух и трех d-частиц.

18.7. Следуя методам задач 5 и 6, перечислите возможные комбинации значений величин J и T для трех нуклонов, находящихся на оболочке с $j = {}^5/_2$.

18.8. Покажите, что существует взаимно-однозначное соответствие между параметрами $\mathbf{k}$, a из соотношений (18.33), причем $0 < a < 2\pi$, а $\mathbf{k}$—единичный вектор, и двумя комплексными параметрами α, β, удовлетворяющими условию $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$.