и набор собственных значений оператора $2\mathsf{T}_y$, который должен совпадать с набором собственных значений оператора $2\mathsf{T}_z$, т. е. со значениями $M_T = {}^1/_2(N_x - N_y)$. Последние можно найти по диаграммам, подобным изображенной на рис. 19.1. Зная собственные значения оператора L_z, можно определить возможные значения величины l. Например, из рис. 19.1 следует, что в представлении (3 0) оператор L_z имеет следующие собственные значения: —3, —1, 1, 3, —2, 0, 2, —1, 1, 0, что приводит к значениям $l=3$ и $l=1$. В общем случае для представления (N 0) имеем $l=N$, $N-2$, $N-4$, ..., 1 или 0 — уже знакомый нам набор значений углового момента l для N-го энергетического уровня осциллятора.

§ 2. ТРЕХМЕРНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР, МНОГОЧАСТИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели движение одной частицы в сферически-симметричном осцилляторном потенциале. Мы установили, что в такой системе имеется дополнительное вырождение по сравнению с $(2l+1)$-кратным вырождением в случае сферически-симметричного потенциала. Рассмотрим теперь систему частиц, движущихся в потенциале гармонического осциллятора и взаимодействующих между собой в соответствии с потенциалом вида $\sum\limits_{i<j} \mathsf{V}(r_{ij})$, который мы считаем малым возмущением. Такая система аналогична системе электронов в атоме (гл. 8, § 6). В гл. 8 мы пришли к выводу о наличии в многоэлектронном атоме LS-связи; сейчас же рассматривать спин нет необходимости. С теоретико-групповой точки зрения тот факт, что система обладает полным угловым моментом L, означает, что волновая функция системы преобразуется по представлению $\mathsf{D}^{(L)}$ группы $\mathcal{R}_3$ при вращениях системы как целого. Величина L является характеристикой, дополнительной к угловым моментам l отдельных частиц, задающим поведение волновой функции при вращениях, затрагивающих координаты отдельной частицы. Гамильтониан, содержащий взаимодействие вида $\sum\limits_{i<j} \mathsf{V}(r_{ij})$, инвариантен относительно группы $\mathcal{R}_3$ вращений системы как целого. Рас-

смотрим теперь процедуру перехода от одночастичной системы к системе из многих частиц в случае, когда группой симметрии является группа U_3. При этом мы будем следовать методу, использованному нами для группы $\mathcal{R}_3$. Операторы полного углового момента мы определяли как суммы по частицам. Точно так же мы можем определить девять полных U_3-операторов — как операторы $\sum_i \mathsf{a}_q^\dagger(i)\,\mathsf{a}_{q'}(i)$. Они, очевидно, удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и одночастичные операторы, поскольку слагаемые, относящиеся к разным частицам, коммутируют друг с другом. Поэтому определенные выше операторы соответствуют группе U_3 одновременных U_3-преобразований, действующих на все частицы. Эта группа содержит в качестве подгруппы одновременные вращения, которым соответствует полный угловой момент L. Как и в одночастичном случае, в качестве девяти инфинитезимальных операторов можно взять оператор $\mathsf{H}=\sum_i \mathsf{H}(i)$, где $\mathsf{H}(i)$ — осцилляторный гамильтониан i-й частицы, оператор полного углового момента $\mathsf{L}_q=\sum_i \mathsf{L}_q(i)$ и пять компонент квадрупольного оператора $\mathsf{Q}_p^{(2)}=\sum_i \mathsf{Q}_p^{(2)}(i)$. Из общей теории следует, что если возмущающий потенциал $\sum_{i<j} \mathsf{V}(r_{ij})$ коммутирует с этими девятью инфинитезимальными операторами, то собственные функции системы отвечают неприводимым представлениям группы U_3. Другими словами, они задаются величиной N, определяющей невозмущенное значение энергии, и типом неприводимого представления $(\lambda\mu)$ группы SU_3. Мы не будем вдаваться в детальное обсуждение того, какие представления $(\lambda\mu)$ возможны при каждом N. Заметим лишь, что соответствующие рассуждения подобны выводу возможных значений полного углового момента L в некоторой атомной конфигурации (гл. 8, § 6, п. Г). В многочастичных системах встречаются представления не только с $\mu=0$, как это имеет место для одной частицы.

Возмущение, инвариантное относительно группы SU_3, можно построить из операторов Казимира, которые по определению инвариантны. Для группы одновременных

SU_3-преобразований оператор Казимира C_2, определенный в гл. 11, § 10, содержит как одночастичный, так и двухчастичный вклад. Через операторы L_q и $\mathsf{Q}_p^{(2)}$ его можно выра ить следующим образом:

$$\mathsf{C}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}) + \frac{1}{6}(\mathbf{Q}^{(2)}\cdot\mathbf{Q}^{(2)}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j}(\mathbf{L}(i)\cdot\mathbf{L}(j)) + \frac{1}{6}\sum_{i,\,j}(\mathbf{Q}^{(2)}(i)\cdot\mathbf{Q}^{(2)}(j)). \qquad (19.12)$$

Собственные значения оператора C_2 известны: они даются формулой (11.21). Собственные значения оператора $(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L})$ равны $L(L+1)$. Отсюда можно получить собственные значения квадрупольного оператора $(\mathbf{Q}^{(2)}\cdot\mathbf{Q}^{(2)})$. Двухчастичная часть этого оператора иногда называется «квадрупольным взаимодействием» и используется при объяснении деформационных и вращательных движений в ядрах (см. книгу [2]).

Интересным с общей точки зрения моментом рассмотренного выше использования группы SU_3 является процедура перехода от одночастичной к многочастичной системе.

§ 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР В n ИЗМЕРЕНИЯХ

В § 1 мы выбрали в качестве объекта изучения трехмерный гармонический осциллятор, исходя из того, что он имеет очевидный физический смысл в реальном трехмерном пространстве. Но с математической точки зрения то, что число измерений равно трем, не играло существенной роли. С тем же успехом мы могли бы начать с операторов $\nabla^2 = \sum_{q=1}^{n} \partial^2/\partial r_q^2$ и $r^2 = \sum_{q=1}^{n} r_q^2$, задающих n-мерный осциллятор. Обобщение на n-мерный случай проводится без принципиальных трудностей и приводит к заключению, что группой симметрии n-мерного осциллятора является группа U_n.

В частности, двумерный осциллятор имеет вырожденные уровни, соответствующие неприводимым представлениям группы SU_2, которые, как мы видели в гл. 18, § 13, совпадают с представлениями группы $\mathcal{R}_3$. Следовательно, уровни двумерного осциллятора, энергии кото-