SU_3-преобразований оператор Казимира C_2, определенный в гл. 11, § 10, содержит как одночастичный, так и двухчастичный вклад. Через операторы L_q и $\mathsf{Q}_p^{(2)}$ его можно выра ить следующим образом:

$$\mathsf{C}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}) + \frac{1}{6}(\mathbf{Q}^{(2)}\cdot\mathbf{Q}^{(2)}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j}(\mathbf{L}(i)\cdot\mathbf{L}(j)) + \frac{1}{6}\sum_{i,\,j}(\mathbf{Q}^{(2)}(i)\cdot\mathbf{Q}^{(2)}(j)). \qquad (19.12)$$

Собственные значения оператора C_2 известны: они даются формулой (11.21). Собственные значения оператора $(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L})$ равны $L(L+1)$. Отсюда можно получить собственные значения квадрупольного оператора $(\mathbf{Q}^{(2)}\cdot\mathbf{Q}^{(2)})$. Двухчастичная часть этого оператора иногда называется «квадрупольным взаимодействием» и используется при объяснении деформационных и вращательных движений в ядрах (см. книгу [2]).

Интересным с общей точки зрения моментом рассмотренного выше использования группы SU_3 является процедура перехода от одночастичной к многочастичной системе.

§ 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР В n ИЗМЕРЕНИЯХ

В § 1 мы выбрали в качестве объекта изучения трехмерный гармонический осциллятор, исходя из того, что он имеет очевидный физический смысл в реальном трехмерном пространстве. Но с математической точки зрения то, что число измерений равно трем, не играло существенной роли. С тем же успехом мы могли бы начать с операторов $\nabla^2 = \sum_{q=1}^{n} \partial^2/\partial r_q^2$ и $r^2 = \sum_{q=1}^{n} r_q^2$, задающих n-мерный осциллятор. Обобщение на n-мерный случай проводится без принципиальных трудностей и приводит к заключению, что группой симметрии n-мерного осциллятора является группа U_n.

В частности, двумерный осциллятор имеет вырожденные уровни, соответствующие неприводимым представлениям группы SU_2, которые, как мы видели в гл. 18, § 13, совпадают с представлениями группы $\mathcal{R}_3$. Следовательно, уровни двумерного осциллятора, энергии кото-

рых равны $N+1$, вырождены соответственно величине углового момента $^1/_2N$, т. е. степень вырождения равна $2(^1/_2N)+1=N+1$. Пара операторов $\mathbf{a}_x^\dagger$ и $\mathbf{a}_y^\dagger$ преобразуется в этом случае по представлению $\mathbf{D}^{(1/2)}$ группы SU_2.

§ 4. ГРУППА СИММЕТРИИ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Гамильтониан, описывающий движение частицы с зарядом $-e$ в кулоновском потенциале e/r, например электрона в атоме водорода, равен (гл. 8, § 5)

$$\mathsf{H}=\frac{p^2}{2M}-\frac{e^2}{r}=\hbar^2\frac{\nabla^2}{2M}-\frac{e^2}{r}. \tag{19.13}$$

Если измерять длину в единицах $\hbar^2/Me^2$ (боровский радиус), а энергию в единицах $e^4/2\hbar^2=Rh$, где R — постоянная Ридберга, то гамильтониан (19.13) принимает вид

$$\mathsf{H}=-\left(\nabla^2+\frac{2}{r}\right). \tag{19.14}$$

Уравнение Шредингера, как обычно, имеет вид $\mathsf{H}\psi=E\psi$, где E — энергия, а ψ — волновая функция. Хорошо известно, что в случае гамильтониана (19.14) уровни энергии задаются целыми числами $n=1, 2, 3, \ldots$; соответствующие энергии равны $-n^{-2}$, и при данном n угловой момент l принимает значения $0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$. Таким образом, имеется более сильное вырождение, нежели соответствующее сферической симметрии.

Будучи сферически-симметричным, гамильтониан (19.14) коммутирует с тремя инфинитезимальными операторами L_q группы $\mathcal{R}_3$. Кроме того, путем алгебраических выкладок можно показать, что гамильтониан H коммутирует также с тремя компонентами векторного оператора

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\{(\nabla\times(\mathbf{r}\times\nabla))-((\mathbf{r}\times\nabla)\times\nabla)\}+\mathbf{r}/r. \tag{19.15}$$

Перейдя к физическим операторам, данное выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{A}=-[\{(\mathbf{p}\times\mathbf{L})-(\mathbf{L}\times\mathbf{p})\}/2M-e^2\mathbf{r}/r]/e^2.$$

Выражение в квадратных скобках называется вектором Рунге—Ленца. Известно, что в классической задаче