ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Здесь (в дополнение к изложенному в т. 1, гл. 4) собраны некоторые полезные, но более специальные сведения о представлениях групп.

§ 1. СИММЕТРИЗОВАННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В гл. 4, § 17 мы определили прямое произведение $\mathsf{T}^{(\alpha)} \otimes \mathsf{T}^{(\beta)}$ двух представлений группы $\mathcal{G}$ и вывели простую формулу (4.43) для характера такого представления. Это определение естественным образом обобщается на произведение n представлений: $\mathsf{T} = \mathsf{T}^{(\alpha)} \otimes \mathsf{T}^{(\beta)} \otimes \ldots$. В данном параграфе мы рассмотрим частный случай такого произведения, когда все сомножители эквивалентны (т. е. $\alpha = \beta = \ldots$). При этом для удобства введем семейство базисных векторов в виде произведений функций, как в гл. 4, § 17. Обозначим через φ_i, где $i = 1, 2, \ldots, s_\alpha$, семейство функций, преобразующихся по неприводимому представлению $\mathsf{T}^{(\alpha)}$. Тогда множество $(s_\alpha)^n$ произведений типа $\varphi_i(1)\varphi_j(2)\ldots\varphi_k(n)$ дает базис для представления T:

$$\mathsf{T}\varphi_i(1)\varphi_j(2)\ldots\varphi_k(n) = \sum_{i', j', \ldots, k'} T^{(\alpha)}_{i'i} T^{(\alpha)}_{j'j} \ldots$$
$$\ldots T^{(\alpha)}_{k'k} \varphi_{i'}(1)\varphi_{j'}(2)\ldots\varphi_{k'}(n).$$

Индекс p у функции $\varphi_i(p)$ нужен для нумерации сомножителей; он фигурирует также в определении скалярного произведения:

$$(\varphi_{i'}(1)\varphi_{j'}(2)\ldots\varphi_{k'}(n),\ \varphi_i(1)\varphi_j(2)\ldots\varphi_k(n)) =$$
$$= (\varphi_{i'}(1),\ \varphi_i(1))(\varphi_{j'}(2),\ \varphi_j(2))\ldots(\varphi_{k'}(n),\ \varphi_k(n)) =$$
$$= \delta_{i'i}\delta_{j'j}\ldots\delta_{k'k}.$$

Значит, в случае ортонормальных функций φ_i множество их произведений также ортонормально. (В физических

приложениях p — индекс частиц системы, а i — индекс возможных состояний частицы.) Введем удобное и компактное обозначение $|ij\ldots k\rangle \equiv \varphi_i(1)\varphi_j(2)\ldots\varphi_k(n)$. Здесь индекс p не пишется, но он определяется порядком расположения индексов вектора $|ij\ldots k\rangle$. Скалярное произведение теперь записывается в виде $\langle i'j'\ldots k'|ij\ldots k\rangle$. (В квантовой механике это обычное обозначение.)

Рассмотрим перестановки P набора из n индексов p. Например,

$$\mathsf{P}_{12}|ij\ldots k\rangle = \varphi_i(2)\varphi_j(1)\ldots\varphi_k(n) = |ji\ldots k\rangle. \qquad (\text{П}3.1)$$

Множество всех таких перестановок образует группу перестановок $\mathcal{S}_n$ (гл. 17). Из равенства (П3.1) следует, что векторное пространство L всевозможных произведений вида $|ij\ldots k\rangle$ будет инвариантно относительно действия группы $\mathcal{S}_n$. В самом деле, перестановки коммутируют с преобразованиями из группы $\mathcal{G}$, и множество L порождает базис представления W произведения групп $\mathcal{G}\times\mathcal{S}_n$. Если обозначить неприводимые представления групп $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}_n$ и $\mathcal{G}\times\mathcal{S}_n$ через $\mathsf{T}^{(\gamma)}$, $\mathsf{V}^{(\lambda)}$ и $\mathsf{T}^{(\gamma)}\otimes\mathsf{V}^{(\lambda)}$, то разложение представления W можно записать в виде

$$\mathsf{W} = \sum_{\gamma,\lambda} m_{\gamma\lambda}\mathsf{T}^{(\gamma)}\otimes\mathsf{V}^{(\lambda)}. \qquad (\text{П}3.2)$$

Поэтому можно выбрать базис пространства L, в котором базисные векторы несут индексы γ и λ, соответствующие трансформационным свойствам этих векторов по отношению к обеим группам $\mathcal{G}$ и $\mathcal{S}_n$. Если обозначить произвольные элементы групп $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}_n$ и $\mathcal{G}\times\mathcal{S}_n$ через G_a, P и $\mathsf{G}_a\mathsf{P}$, то на основании формулы (4.66) соотношение между характерами, соответствующее разложению (П3.2), можно записать в виде

$$\chi(\mathsf{G}_a\mathsf{P}) = \sum_{\gamma,\lambda} m_{\gamma\lambda}\chi^{(\gamma)}(\mathsf{G}_a)\chi^{(\lambda)}(\mathsf{P}). \qquad (\text{П}3.3)$$

В действительности нам часто будет нужно лишь одно из подпространств, входящих в разложение $L = \sum_\lambda L_\lambda$, где L_λ — подпространство, содержащее все базисные векторы пространства L, которые преобразуются по определенному неприводимому представлению $\mathsf{V}^{(\lambda)}$ группы $\mathcal{S}_n$. На таком пространстве L_λ действует представление T_λ

группы $\mathcal{G}$, которое, согласно формуле (П3.2), разлагается на неприводимые представления группы $\mathcal{G}$:

$$\mathsf{T}_\lambda = \sum_\gamma m_{\gamma\lambda} \mathsf{T}^{(\gamma)}.$$

Следовательно, его характер дается выражением

$$\chi_\lambda(\mathsf{G}_a) = \sum_\gamma m_{\gamma\lambda} \chi^{(\gamma)}(\mathsf{G}_a).$$

Пользуясь соотношением ортогональности характеров группы $\mathcal{S}_n$ [формула (4.25а)], этот характер можно найти также из равенства (П3.3):

$$\chi_\lambda(\mathsf{G}_a) = \sum_\gamma m_{\gamma\lambda} \chi^{(\gamma)}(\mathsf{G}_a) = \frac{1}{n!} \sum_{\mathsf{P}} \chi^{(\lambda)*}(\mathsf{P})\, \chi(\mathsf{G}_a\mathsf{P}), \quad (\text{П3.4})$$

где суммирование идет по всем $n!$ перестановкам P группы $\mathcal{S}_n$. Таким образом, чтобы найти характер χ_λ, нужно сначала вычислить характер $\chi(\mathsf{G}_a\mathsf{P})$, а затем воспользоваться равенством (П3.4), подставляя в него характеры $\chi^{(\lambda)}$ из таблицы характеров группы перестановок. Если характер χ_λ найден, то целые числа $m_{\gamma\lambda}$ находятся из обычного соотношения ортогональности характеров группы $\mathcal{G}$:

$$m_{\gamma\lambda} = \frac{1}{g} \sum_a \chi^{(\gamma)*}(\mathsf{G}_a)\, \chi_\lambda(\mathsf{G}_a), \quad (\text{П3.5})$$

где g — число элементов группы $\mathcal{G}$.

Характер $\chi(\mathsf{G}_a\mathsf{P})$ мы вычислим лишь для нескольких довольно простых перестановок, а вывод общей формулы отложим до конца данного параграфа. Рассмотрим сначала тождественную перестановку $\mathsf{P} = \mathsf{E}$. По определению характера имеем

$$\begin{aligned}\chi(\mathsf{G}_a\mathsf{E}) &= \sum_{i,j,\ldots,k} \langle ij\ldots k | \mathsf{T}(\mathsf{G}_a) | ij\ldots k\rangle = \\ &= \sum_{i,j,\ldots,k} T_{ii}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\, T_{jj}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a) \ldots T_{kk}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a) = \\ &= \left\{\sum_i T_{ii}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\right\}^n = \{\chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\}^n. \end{aligned} \quad (\text{П3.6})$$

Значит, характер $\chi(\mathsf{G}_a\mathsf{E})$ выражается через известные характеры неприводимых представлений группы $\mathcal{G}$. Аналогично для перестановки P_{12} мы, пользуясь равенством

(П3.1), получаем

$$\begin{aligned}\chi(\mathsf{G}_a\mathsf{P}_{12}) &= \sum_{i,j,\ldots,k} \langle ij\ldots k|\mathsf{T}(\mathsf{G}_a)|ji\ldots k\rangle = \\ &= \sum_{i,j,\ldots,k} T_{ij}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\,T_{ji}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\ldots T_{kk}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a) = \\ &= \sum_{i,\ldots,k} T_{ii}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a^2)\ldots T_{kk}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a) = \\ &= \chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a^2)\{\chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\}^{n-2}. \end{aligned} \tag{П3.7}$$

Это выражение снова содержит лишь характеры неприводимых представлений, так как G_a^2 — это просто другой элемент группы $\mathcal{G}$. Для более сложной перестановки трех объектов $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ (в обозначениях примера 10 гл. 2, § 2) подобные рассуждения приводят к следующему выражению:

$$\chi\left(\mathsf{G}_a\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right) = \chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a^3)\{\chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\}^{n-3}. \tag{П3.8}$$

Теперь мы в состоянии вычислить все характеры $\chi_\lambda(\mathsf{G}_a)$, например при $n=2$ и $n=3$. При $n=2$ имеются лишь два элемента группы E и P_{12} и лишь два неприводимых представления, соответствующих симметричному и антисимметричному базисным векторам. Взяв характеры из табл. 4.5, на основании формул (П3.4)—(П3.7) получаем

$$\begin{aligned}\chi_{\text{симм}}(\mathsf{G}_a) &= \frac{1}{2}[\{\chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\}^2 + \chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a^2)], \\ \chi_{\text{антисимм}}(\mathsf{G}_a) &= \frac{1}{2}[\{\chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\}^2 - \chi^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a^2)].\end{aligned} \tag{П3.9}$$

Характеры для $n=3$ мы можем взять из табл. 4.2, так как группы $\mathcal{S}_3$ и D_3 изоморфны (гл. 2, § 3). Имеются три класса сопряженных элементов: E; P_{12}, P_{23}, P_{31}; $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; и три неприводимых представления, которые обычно называются: 1) полностью симметричным, 2) полностью антисимметричным и 3) представлением со смешанной симметрией (оно двумерно). В этом случае

мы аналогично предыдущему получаем

$$\chi_{\text{симм}}(G_a)=\frac{1}{6}[\{\chi^{(\alpha)}(G_a)\}^3+3\chi^{(\alpha)}(G_a^2)\chi^{(\alpha)}(G_a)+$$
$$+2\chi^{(\alpha)}(G_a^3)];$$
$$\chi_{\text{антисимм}}(G_a)=\frac{1}{6}[\{\chi^{(\alpha)}(G_a)\}^3-3\chi^{(\alpha)}(G_a^2)\chi^{(\alpha)}(G_a)+$$
$$+2\chi^{(\alpha)}(G_a^3)], \qquad (\text{П}3.10)$$
$$\chi_{\text{смеш}}(G_a)=\frac{1}{6}[2\{\chi^{(\alpha)}(G_a)\}^3-2\chi^{(\alpha)}(G_a^3)].$$

Заметим, что нам не потребовался конкретный вид группы $\mathcal{G}$, хотя, конечно, для получения численных выражений нужны значения характеров $\chi^{(\alpha)}$ неприводимых представлений группы $\mathcal{G}$.

Исходя из того что любую перестановку можно представить в виде произведения циклов разной длины (гл. 17, § 1), нетрудно вывести общую формулу для характеров $\chi(G_a\mathsf{P})$. Если перестановка P содержит n_1 циклов длиной 1, n_2 циклов длиной 2 и т. д., то, действуя аналогично рассмотренным выше случаям несложных перестановок, находим

$$\chi(G_a\mathsf{P})=\prod_i\{\chi^{(\alpha)}(G_a^i)\}^{n_i}. \qquad (\text{П}3.11)$$

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОДГРУППЫ

В гл. 4, § 17 было показано, как произведение двух представлений группы $\mathcal{G}$ разлагается на неприводимые составляющие. В частности, целочисленные коэффициенты m_γ в разложении [формула (4.44)]

$$\mathsf{T}^{(\alpha)}\otimes\mathsf{T}^{(\beta)}=\sum_\gamma m_\gamma\mathsf{T}^{(\gamma)}$$

вычислялись по формуле (4.45) на основании таблицы характеров. Эти коэффициенты можно найти и другим способом, если известны соответствующие коэффициенты для подгруппы $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$. Неприводимые представления группы $\mathcal{H}$ обозначим через $\mathsf{T}^{(\tilde\alpha)}$, $\mathsf{T}^{(\tilde\beta)}$ и т. д. Предположим,