доказать лишь, что $m_1+m_2=2$. Тем не менее данный метод очень удобен в случае непрерывных групп, когда с характерами большой группы $\mathcal{G}$ труднее работать, чем с характерами подгруппы $\mathcal{H}$.

§ 3. УМНОЖЕНИЕ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методы, которыми мы находили неприводимые характеры в гл. 4, § 15, были вполне пригодны в случае групп с малым числом классов сопряженных элементов. В данном параграфе мы выведем дополнительные соотношения между характерами, которые позволяют определить характеры любой конечной группы. Введем сначала сумму по всем элементам группы из класса сопряженных элементов $\mathscr{C}_i$. Мы обозначим ее тем же символом $\mathscr{C}_i$:

$$\mathscr{C}_i=\sum_{\mathsf{G}_a \text{ из } \mathscr{C}_i} \mathsf{G}_a \tag{П3.16}$$

и назовем оператором класса сопряженнных элементов. Докажем, что в произведение двух таких сумм все элементы любого заданного класса сопряженных элементов должны входить одинаковое число раз, т. е.

$$\mathscr{C}_i\mathscr{C}_j=\sum_{\substack{\mathsf{G}_a \text{ из } \mathscr{C}_i\\ \mathsf{G}_b \text{ из } \mathscr{C}_j}} \mathsf{G}_a\mathsf{G}_b=\sum_k c_{ijk}\mathscr{C}_k. \tag{П3.17}$$

В самом деле, представим произведение в виде

$$\mathscr{C}_i\mathscr{C}_j=n_b\mathsf{G}_b+n_c\mathsf{G}_c+\ldots, \tag{П3.18}$$

где G_b и G_c — два элемента из одного класса сопряженных элементов $\mathscr{C}_i$. Для любого элемента G_a мы имеем

$$\mathsf{G}_a\mathscr{C}_i\mathsf{G}_a^{-1}=\mathscr{C}_i, \tag{П3.19}$$

так как для любого элемента G из класса сопряженных элементов $\mathscr{C}_i$ элемент $\mathsf{G}_a\mathsf{G}\mathsf{G}_a^{-1}$ тоже лежит в классе $\mathscr{C}_i$ и в случае разных G эти элементы различны. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_i\mathscr{C}_j&=\mathsf{G}_a\mathscr{C}_i\mathsf{G}_a^{-1}\mathsf{G}_a\mathscr{C}_j\mathsf{G}_a^{-1}=\mathsf{G}_a\mathscr{C}_i\mathscr{C}_j\mathsf{G}_a^{-1}=\\&=n_b\mathsf{G}_a\mathsf{G}_b\mathsf{G}_a^{-1}+n_c\mathsf{G}_a\mathsf{G}_c\mathsf{G}_a^{-1}+\ldots\ .\end{aligned} \tag{П3.20}$$

Выбирая теперь такой элемент G_a, для которого $\mathsf{G}_a\mathsf{G}_b\mathsf{G}_a^{-1}=\mathsf{G}_c$, и сравнивая выражения (П3.20) и (П3.18),

видим, что $n_b = n_c$. Тем самым соотношение (П3.17) доказано.

Выберем теперь какое-либо неприводимое представление $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ группы $\mathcal{G}$ и определим сумму матриц

$$\mathsf{T}_i^{(\alpha)} = \sum_{\mathsf{G}_a \text{ из } \mathscr{C}_i} \mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a). \qquad (\text{П3.21})$$

Если равенство (П3.19) записать в виде $\mathsf{G}_a \mathscr{C}_i = \mathscr{C}_i \mathsf{G}_a$, то в матричном представлении $\mathsf{T}^{(\alpha)}$ будем иметь $\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)\,\mathsf{T}_i^{(\alpha)} = \mathsf{T}_i^{(\alpha)}\mathsf{T}^{(\alpha)}(\mathsf{G}_a)$. Так как это равенство справедливо для всех элементов G_a группы $\mathcal{G}$, по первой лемме Шура оператор $\mathsf{T}_i^{(\alpha)}$ должен быть пропорционален единичной матрице: $\mathsf{T}_i^{(\alpha)} = \lambda_i^{(\alpha)}\,1$.

Сравнивая теперь следы матриц в обеих частях равенства (П3.21), получаем $s_\alpha \lambda_i^{(\alpha)} = c_i \chi_i^{(\alpha)}$, т. е.

$$\mathsf{T}_i^{(\alpha)} = \frac{c_i}{s_\alpha}\chi_i^{(\alpha)}\,1, \qquad (\text{П3.22})$$

где c_i — число элементов в классе сопряженных элементов $\mathscr{C}_i$. Записав равенство (П3.17) в матричном виде, получаем

$$\mathsf{T}_i^{(\alpha)}\mathsf{T}_j^{(\alpha)} = \sum_k c_{ijk}\,\mathsf{T}_k^{(\alpha)}.$$

Подставляя сюда выражение (П3.22), приходим к соотношению между характерами

$$c_i c_j \chi_i^{(\alpha)}\chi_j^{(\alpha)} = s_\alpha \sum_k c_{ijk} c_k \chi_k^{(\alpha)}. \qquad (\text{П3.23})$$

Заметим, что коэффициенты c_{ijk}, фигурирующие в соотношении (П3.23), находятся из таблицы умножения группы с помощью соотношения (П3.17). Таким образом, мы вывели систему уравнений (П3.23) (для всех индексов i и j), которая позволяет вычислять характеры.