ПРИЛОЖЕНИЕ 4

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ГРУППЕ $\mathcal{R}_3$

В первых двух параграфах этого приложения (§1 и 2) выводятся некоторые полезные формулы для сферических гармоник, прямо следующие из изложенного нами в гл. 7 для группы $\mathcal{R}_3$. В § 3 сначала рассматривается общий случай интегрирования на группе, а затем выводятся выражения для соответствующих весовых функций в интегралах на группе $\mathcal{R}_3$.

§ 1. ИНТЕГРАЛ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРЕХ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

На основании теоремы Вигнера—Эккарта можно взять один полезный интеграл. Рассматривая функцию $Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta, \varphi)$ как оператор, входящий в формулу (7.53), получаем

$$\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} Y_m^{(l)*}(\theta, \varphi)\, Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta, \varphi)\, Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \\ = C(l_1 l_2 l,\ m_1 m_2 m)\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2\rangle. \qquad (\text{П}4.1)$$

(Мы воспользовались тем, что группа $\mathcal{R}_3$ просто приводима и поэтому индекс t не нужен, а также тем, что коэффициенты Клебша—Гордана действительны.) Равенство (П4.1) с учетом формулы (7.50) можно использовать для разложения произведения $Y_{m_1}^{(l_1)} Y_{m_2}^{(l_2)}$, рассматриваемого как единая функция, в виде (7.49):

$$Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta, \varphi)\, Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta, \varphi) = \\ = \sum_{lm} C(l_1 l_2 l,\ m_1 m_2 m)\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2\rangle\, Y_m^{(l)}(\theta, \varphi). \qquad (\text{П}4.2)$$

Чтобы найти приведенный матричный элемент, обратим сначала равенство (П4.2), основываясь на ортогональности коэффициентов Клебша—Гордана (гл. 7, § 17):

$$\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2 \rangle Y_m^{(l)}(\theta, \varphi) = \\ = \sum_{m_1 m_2} C(l_1 l_2 l, m_1 m_2 m) Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta, \varphi) Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta, \varphi). \quad (\text{П}4.3)$$

Затем, поскольку приведенный матричный элемент $\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2 \rangle$ не зависит от углов θ и φ, мы можем подставить в выражение (П4.3) любые удобные нам значения этих переменных. При $\theta = 0$ сферические гармоники становятся независимыми от переменной φ:

$$Y_m^{(l)}(0, \varphi) = \delta_{m,0} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos 0) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \delta_{m,0}, \quad (\text{П}4.4)$$

так что

$$\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2 \rangle = \left(\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}\right)^{1/2} C(l_1 l_2 l, 000). \quad (\text{П}4.5)$$

Окончательно интеграл (П4.1) дается выражением

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_m^{(l)*}(\theta, \varphi) Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta, \varphi) Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \\ = \left(\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}\right)^{1/2} C(l_1 l_2 l, 000) C(l_1 l_2 l, m_1 m_2 m). \quad (\text{П}4.6)$$

Отметим, что этот интеграл равен нулю, если величины l_1, l_2 и l не удовлетворяют условию треугольника (гл. 7, § 4, п. Г), а также если сумма $l_1 + l_2 + l$ — нечетное число.

§ 2. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Рассмотрим произведение двух сферических гармоник, зависящих от координат *двух* частиц, $Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta_1, \varphi_1) Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta_2, \varphi_2)$. Образовав сумму таких произведений с $l_1 = l_2$, можно (гл. 4, § 17 и гл. 7, § 4, п. Г) на основании формулы (4.46) получить инвариант, поскольку в формуле (7.44) возможно значение $J = 0$. С учетом того что инвариантность относительно подгруппы $\mathcal{R}_2$ влечет условие $m_1 + m_2 = 0$, этот инвариант записывается следующим образом:

$$f_0^{(0)} = \sum_{m_1} C(l_1 l_1 0, m_1 - m_1 0) Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta_1, \varphi_1) Y_{-m_1}^{(l_1)}(\theta_2, \varphi_2). \quad (\text{П}4.7)$$