Чтобы найти приведенный матричный элемент, обратим сначала равенство (П4.2), основываясь на ортогональности коэффициентов Клебша—Гордана (гл. 7, § 17):

$$\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2 \rangle Y_m^{(l)}(\theta, \varphi) = \\ = \sum_{m_1 m_2} C(l_1 l_2 l, m_1 m_2 m) Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta, \varphi) Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta, \varphi). \quad (\text{П}4.3)$$

Затем, поскольку приведенный матричный элемент $\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2 \rangle$ не зависит от углов θ и φ, мы можем подставить в выражение (П4.3) любые удобные нам значения этих переменных. При $\theta = 0$ сферические гармоники становятся независимыми от переменной φ:

$$Y_m^{(l)}(0, \varphi) = \delta_{m,0} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos 0) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \delta_{m,0}, \quad (\text{П}4.4)$$

так что

$$\langle l \| \mathbf{Y}^{(l_1)} \| l_2 \rangle = \left(\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}\right)^{1/2} C(l_1 l_2 l, 000). \quad (\text{П}4.5)$$

Окончательно интеграл (П4.1) дается выражением

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_m^{(l)*}(\theta, \varphi) Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta, \varphi) Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \\ = \left(\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}\right)^{1/2} C(l_1 l_2 l, 000) C(l_1 l_2 l, m_1 m_2 m). \quad (\text{П}4.6)$$

Отметим, что этот интеграл равен нулю, если величины l_1, l_2 и l не удовлетворяют условию треугольника (гл. 7, § 4, п. Г), а также если сумма $l_1 + l_2 + l$ — нечетное число.

§ 2. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Рассмотрим произведение двух сферических гармоник, зависящих от координат *двух* частиц, $Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta_1, \varphi_1) Y_{m_2}^{(l_2)}(\theta_2, \varphi_2)$. Образовав сумму таких произведений с $l_1 = l_2$, можно (гл. 4, § 17 и гл. 7, § 4, п. Г) на основании формулы (4.46) получить инвариант, поскольку в формуле (7.44) возможно значение $J = 0$. С учетом того что инвариантность относительно подгруппы $\mathcal{R}_2$ влечет условие $m_1 + m_2 = 0$, этот инвариант записывается следующим образом:

$$f_0^{(0)} = \sum_{m_1} C(l_1 l_1 0, m_1 - m_1 0) Y_{m_1}^{(l_1)}(\theta_1, \varphi_1) Y_{-m_1}^{(l_1)}(\theta_2, \varphi_2). \quad (\text{П}4.7)$$

Заметим, что, хотя величина $f_0^{(0)}$ инвариантна относительно вращений системы, она зависит от взаимного расположения двух частиц. Как мы сейчас покажем, функция $f_0^{(0)}$ есть полином Лежандра, зависящий от угла θ_{12} между радиус-векторами частиц. В самом деле, поскольку величина $f_0^{(0)}$ инвариантна относительно вращений, мы можем путем подходящего поворота добиться того, чтобы частица 1 находилась на оси z. В этом положении $\theta_1=0$, $\theta_2=\theta_{12}$, и на основании формулы (П4.4) выражение (П4.7) приводится к виду

$$f_0^{(0)}=C(l_1l_10,\ 000)\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}P_{l_1}(\cos\theta_{12}),$$

если учесть, что при $m=0$ сферические гармоники сводятся к полиномам Лежандра. Коэффициенты Клебша — Гордана в формуле (П4.7) имеют простой вид (задача 7.14): $C(l_1l_10,\ m_1-m_10)=(-1)^{l_1-m_1}/(2l_1+1)^{1/2}$. В результате выражение (П4.7) принимает вид

$$\sum_m(-1)^mY_m^{(l)}(\theta_1,\ \varphi_1)Y_{-m}^{(l)}(\theta_2,\ \varphi_2)=\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)P_l(\cos\theta_{12}). \tag{П4.8}$$

Эта формула известна под названием теоремы сложения для сферических гармоник и применяется, например, при анализе потенциала взаимодействия двух электронов, когда его надо представить в виде, допускающем разложение на множители, зависящие от координат отдельных электронов (приложение 5, § 1).

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ГРУППЕ

В гл. 7, § 1 мы отмечали, что сумму по группе $\sum_{a=1}^{g}$, входящую в соотношения ортогональности для неприводимых представлений конечной группы, в случае непрерывной группы следует заменить интегралом по параметрам группы $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r$, взятым с некоторой весовой функцией $\rho(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r)$. В частном случае группы $\mathcal{R}_2$ мы видели, что соотношения ортогональности выполняются при выборе весовой функции $\rho(a)=1$. Чтобы найти весовую функцию для группы $\mathcal{R}_3$, необходимо более подробно исследовать свойства, которыми должна обладать