телами (ионы, электроны), то эти уравнения являются основой электродинамики Лоренца и оптики движущихся тел.

Если преобразовать эти уравнения, которые справедливы в системе K, с помощью формул преобразования из §§ 3 и 6 к системе k, то получаются следующие уравнения:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\rho' + \frac{\partial X'}{\partial\tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial\eta} - \frac{\partial M'}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial\tau} = \frac{\partial Y'}{\partial\zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial\eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial\tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial\zeta} - \frac{\partial N'}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial M'}{\partial\tau} = \frac{\partial Z'}{\partial\xi} - \frac{\partial X'}{\partial\zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial\tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial\xi} - \frac{\partial L'}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial N'}{\partial\tau} = \frac{\partial X'}{\partial\eta} - \frac{\partial Y'}{\partial\xi},$$

где

$$u_\xi = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}}, \qquad u_\eta = \frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)}, \qquad u_\zeta = \frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)},$$

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial\xi} + \frac{\partial Y'}{\partial\eta} + \frac{\partial Z'}{\partial\zeta} = \beta\cdot\left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right)\rho.$$

Таким образом, как это и следует из теоремы сложения скоростей (§ 5), вектор (u_ξ, u_η, u_ζ) есть не что иное, как скорость электрических зарядов, измеренная в системе k. Тем самым показано, что электродинамическая основа лоренцовской электродинамики движущихся тел подчиняется принципу относительности, если исходить из наших кинематических принципов.

Отметим еще кратко, что из доказанных уравнений легко может быть выведена следующая важная теорема: если электрически заряженное тело движется в пространстве произвольно и если его заряд, наблюдаемый из координатной системы, движущейся вместе с этим телом, при этом не изменяется, то этот заряд остается неизменным и при наблюдении из «покоящейся» системы K.

§ 10. Динамика (слабо ускоренного) электрона

Пусть в электромагнитном поле движется точечная частица с электрическим зарядом ε (в дальнейшем называемая «электроном»), о законе движения которой мы будем предполагать только следующее.

Если электрон находится в покое в течение определенного промежутка времени, то в ближайший за ним элемент времени движение электрона, поскольку оно является медленным, будет описываться уравнениями:

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X, \qquad \mu\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y, \qquad \mu\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

где x, y, z — координаты электрона, а μ — масса электрона.

Далее, пусть электрон в течение определенного промежутка времени обладает скоростью v. Найдем закон, согласно которому электрон движется в непосредственно следующий за этим промежутком элемент времени.

Не ограничивая общности рассуждений, мы можем допустить и допустим на самом деле, что в тот момент, когда мы начинаем наблюдение, наш электрон находится в начале координат и движется вдоль оси X системы K со скоростью v. В таком случае ясно, что в указанный момент времени ($t = 0$) электрон находится в покое относительно координатной системы k, движущейся параллельно оси X с постоянной скоростью v.

Из сделанного выше предположения в сочетании с принципом относительности следует, что уравнения движения электрона, наблюдаемого из системы k в течение времени, непосредственно следующего за $t = 0$ (при малых значениях t), имеют вид:

$$\mu\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X', \qquad \mu\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y', \qquad \mu\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

где обозначенные через ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' величины относятся к системе k. Если к тому же положить, что при $t = x = y = z = 0$ должны быть $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, то будут справедливы формулы преобразования из §§ 3 и 6 и, следовательно, будут выполняться следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right), \\
&\xi = \beta(x - vt), && X' = X, \\
&\eta = y, && Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \\
&\zeta = z, && Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right).
\end{aligned}$$

С помощью этих уравнений преобразуем написанные выше уравнения движения от системы k к системе K и получим:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^3}X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right). \end{aligned}\right. \tag{A}$$

Опираясь на обычный прием рассуждений, определим теперь «продольную» и «поперечную» массы движущегося электрона. Запишем уравнения (A) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\ \mu\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y', \\ \mu\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z'. \end{aligned}$$

При этом заметим, прежде всего, что $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ являются компонентами пондеромоторной силы, действующей на электрон, причем эти компоненты рассматриваются в координатной системе, которая в данный момент движется вместе с электроном с такой же, как у электрона, скоростью. (Эта сила могла бы быть измерена, например, пружинными весами, покоящимися в этой системе.) Если теперь эту силу будем называть просто «силой, действующей на электрон», и сохраним уравнение (для численных значений)

$$\text{Масса} \times \text{Ускорение} = \text{Сила},$$

и если мы далее установим, что ускорения должны измеряться в покоящейся системе K, то из указанных выше уравнений получим:

$$\text{Продольная масса} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-(v/V)^2}\right)^3},$$

$$\text{Поперечная масса} = \frac{\mu}{1-(v/V)^2}.$$

Конечно, мы будем получать другие значения для масс при другом определении силы и ускорения; отсюда видно, что при сравнении различных теорий движения электрона нужно быть весьма осторожным. Заметим, что эти результаты относительно массы справедливы также и для нейтральных материальных точек, ибо такая материальная точка может быть путем присоединения *сколь угодно малого* электрического заряда превращена в электрон (в нашем смысле).

Определим кинетическую энергию электрона. Если электрон из начала координат системы K с начальной скоростью 0 движется все время вдоль оси X под действием электростатической силы X, то ясно, что взятая у электростатического поля энергия будет равна $\int \varepsilon X\,dx$. Так как электрон ускоряется медленно и вследствие этого не должен отдавать энергию в форме излучения, то энергия, взятая у электростатического поля, должна быть положена равной энергии движения W электрона. Принимая во внимание, что в течение всего рассматриваемого процесса движения справедливо первое из уравнений (A), получаем:

$$W = \int \varepsilon X\,dx = \int_0^v \beta^3 \mu v\,dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1 \right\}.$$

При $v = V$ величина W становится, таким образом, бесконечно большой. Как в прежних результатах, так и здесь, скорости, превышающие скорость света, существовать не могут. Это выражение для кинетической энергии должно быть справедливым и для любых масс в силу приведенного выше аргумента.

Перечислим теперь все вытекающие из системы уравнений (A) свойства движения электрона, допускающие опытную проверку.

1. Из второго уравнения системы (A) следует, что электрическое поле Y и магнитное поле N одинаково сильно отклоняют электрон, движущийся со скоростью v, в том случае, когда $Y = N\frac{v}{V}$. Отсюда видно, что, согласно нашей теории, для любых скоростей можно определить скорость электрона из отношения отклонения магнитным полем A_m к отклонению электрическим полем A_e, если применить закон:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Это соотношение поддается экспериментальной проверке, так как скорость электрона может быть измерена также и непосредственно, например, при помощи быстро переменных электрических и магнитных полей.

2. Из формулы для кинетической энергии электрона следует, что между пройденной разностью потенциалов P и достигнутой скоростью v электрона должно существовать следующее соотношение:

$$P = \int X\,dx = \frac{\mu}{\varepsilon}V^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right\}.$$

3. Вычислим радиус кривизны R орбиты, когда имеется перпендикулярное скорости электрона магнитное поле напряженностью N (как единственная отклоняющая сила).

Из второго уравнения (A) получаем

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{v}{V}N\sqrt{1-(v/V)^2},$$

или

$$R = V^2\frac{\mu}{\varepsilon}\cdot\frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\cdot\frac{1}{N}.$$

Эти три соотношения являются полным выражением законов, по которым, согласно предложенной теории, должны двигаться электроны.

В заключение отмечу, что мой друг и коллега М. Бессо явился верным помощником при разработке изложенных здесь проблем и что я обязан ему за ряд ценных указаний.