§ 6. Новые формулы преобразования (преобразование Лоренца) и их физический смысл

Из всего сказанного в предыдущем параграфе ясно, что правило параллелограмма скоростей, которое заставляло считать невозможным согласование теории Лоренца с принципом относительности, основано на произвольных и неприемлемых гипотезах. В самом деле, это правило приводит к следующим формулам преобразования:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

или, в более общем виде,

$$t' = t, \quad x' = x - v_x t, \quad y' = y - v_y t, \quad z' = z - v_z t.$$

Как мы видели, первое из этих соотношений выражает плохо обоснованную гипотезу о координатах времени элементарного события, взятых по отношению к двум системам отсчета S и S', движущимся равномерно и прямолинейно одна по отношению к другой. Три другие соотношения выражают гипотезу о том, что кинематическая конфигурация системы S' относительно системы S идентична геометрической конфигурации системы S'.

Если оставить в покое обычную кинематику и на новых принципах создать новую, то при этом возникают формулы преобразования, отличные от приведенных выше. Итак, мы сейчас покажем[1], что из

1. Принципа относительности и

2. Принципа постоянства скорости света

следуют формулы преобразования, позволяющие видеть, что теория Лоренца совместима с принципом относительности. Теорию, основанную на этих принципах, мы называем *теорией относительности.*

Пусть S и S' — две эквивалентные системы отсчета, т. е. такие, в которых длины измеряются одной единицей и в каждой из которых имеется по группе часов, идущих синхронно, если обе системы неподвижны одна относительно другой[2]. В соответствии с принципом относительности законы природы должны быть одинаковы в этих системах,

[1] A. Einstein. Ann. Phys., 1905, 17, 891; Jahrb. Radioact., 1907, Bd. IV, H. 4, 441.

[2] В дальнейшем мы всегда будем неявно предполагать, что факт приведения в движение и остановки линейки, или часов, не изменяет ни длины линейки, ни хода часов.

независимо от того, находятся ли они в состоянии относительного покоя или движутся равномерно и прямолинейно одна по отношению к другой. Так, в частности, скорость света в пустоте должна выражаться одним и тем же числом в обеих системах. Пусть t, x, y, z — координаты элементарного события в системе S и t', x', y', z' — координаты того же события в системе S'. Мы поставили перед собой задачу найти соотношения, связывающие эти две совокупности координат. Используя однородность времени и пространства[1], можно показать, что эти соотношения должны быть линейными, т. е. время t связано со временем t' формулой вида:

$$t' = At + Bx + Cy + Dz. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, для наблюдателя, связанного с системой S, следует, что три координатные плоскости системы S движутся равномерно; однако эти три плоскости не образуют прямоугольного трехгранника, хотя мы и предполагаем, что с точки зрения наблюдателя, связанного с этой системой, система S является прямоугольной. Если же, обратившись к системе S', мы выберем ось x параллельно направлению движения S', то, в силу симметрии, отсюда будет следовать, что система S' будет казаться нам прямоугольной. В частности, мы можем выбрать относительное положение двух систем таким образом, что ось x будет постоянно совпадать с осью x', ось y будет все время параллельна оси y' и, кроме того, для наблюдателя, связанного с системой S, одноименные оси будут иметь одинаковое направление. Начнем отсчитывать время с того момента, когда начала координат обеих систем совпадут. При этих условиях искомые соотношения оказываются однородными и уравнения

$$\begin{aligned} x' &= 0 \quad \text{и} \quad x - vt = 0, \\ y' &= 0 \quad \text{и} \quad y = 0, \\ z' &= 0 \quad \text{и} \quad z = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

эквивалентными; иначе говоря, координаты x, y, z, x', y', z' связаны соотношениями следующего вида

$$\begin{aligned} x' &= E(x - vt), \\ y' &= Fy, \\ z' &= Gz. \end{aligned}$$

[1] См. замечание на стр. 59.

Для определения постоянных A, B, C, D, E, F, G, входящих в уравнения (2) и (3), мы учтем, что, в соответствии с принципом постоянства скорости света, скорость распространения имеет одну и ту же величину c по отношению к обеим системам, т. е., что уравнения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \end{cases} \tag{4}$$

эквивалентны. Заменяя во втором из уравнений t', x', y', z' их значениями из (2) и (3) и сравнивая с первым уравнением, получаем формулы преобразования следующего вида:

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(v) \cdot \beta(t - (v/c^2)\, x), \\ x' &= \varphi(v) \cdot \beta(x - vt), \\ y' &= \varphi(v) y, \\ z' &= \varphi(v) z. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}},$$

а $\varphi(v)$ — некоторая функция v, подлежащая определению. Ее легко определить, если ввести третью систему координат S'', эквивалентную двум первым, движущуюся относительно S' с постоянной скоростью $-v$ и ориентированную по отношению к системе S таким же образом, как и S' по отношению к S.

Применяя два раза формулы преобразования (5), находим, что

$$\begin{aligned} t'' &= \varphi(v)\varphi(-v) t, \\ x'' &= \varphi(v)\varphi(-v) x, \\ y'' &= \varphi(v)\varphi(-v) y, \\ z'' &= \varphi(v)\varphi(-v) z. \end{aligned}$$

Поскольку начала координат систем S и S'' все время совпадают, оси имеют одну и ту же ориентацию и системы эквивалентны, мы должны обязательно получить

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Так как, кроме того, соотношение между y и y' (как и между z и z') не зависит от знака v, то

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(v) = 1$$

(значение $\varphi(v) = -1$ в этом случае непригодно),

$$\begin{aligned} t' &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \\ x' &= \beta(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{I}$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Лоренц очень удачно ввел эти формулы преобразования в электродинамику. В дальнейшем мы будем их называть *преобразованием Лоренца.*

Если эти формулы разрешить относительно t, x, y, z, получаются формулы того же вида, где, однако, штрихованные величины заменены нештрихованными и v заменено на $-v$. В конце концов этот результат является очевидным следствием принципа относительности: система отсчета S движется относительно системы отсчета S' параллельно осям x и x' со скоростью $-v$.

Комбинируя формулы преобразования с уравнениями, описывающими вращение одной системы относительно другой, можно получить более общие преобразования координат.

§ 7. Физическая интерпретация формул преобразования

1. Рассмотрим тело, покоящееся относительно системы отсчета S'. Пусть x'_1, y'_1, z'_1 и x'_2, y'_2, z'_2 — координаты двух точек тела. В любой момент t в системе S между этими координатами справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \sqrt{1 - (v^2/c^2)}(x'_2 - x'_1), \\ y_2 - y_1 &= y'_2 - y'_1, \\ z_2 - z_1 &= z'_2 - z'_1. \end{aligned} \tag{6}$$