

Отсюда следует, что

$$\varphi(v) = 1$$

(значение $\varphi(v) = -1$ в этом случае непригодно),

$$\begin{aligned} t' &= \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \\ x' &= \beta(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{I}$$

где

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Лоренц очень удачно ввел эти формулы преобразования в электродинамику. В дальнейшем мы будем их называть *преобразованием Лоренца*.

Если эти формулы разрешить относительно t , x , y , z , получаются формулы того же вида, где, однако, штрихованные величины заменены нештрихованными и v заменено на $-v$. В конце концов этот результат является очевидным следствием принципа относительности: система отсчета S движется относительно системы отсчета S' параллельно осям x и x' со скоростью $-v$.

Комбинируя формулы преобразования с уравнениями, описывающими вращение одной системы относительно другой, можно получить более общие преобразования координат.

§ 7. Физическая интерпретация формул преобразования

1. Рассмотрим тело, покоящееся относительно системы отсчета S' .

Пусть x'_1 , y'_1 , z'_1 и x'_2 , y'_2 , z'_2 — координаты двух точек тела. В любой момент t в системе S между этими координатами справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \sqrt{1 - (v^2/c^2)}(x'_2 - x'_1), \\ y_2 - y_1 &= y'_2 - y'_1, \\ z_2 - z_1 &= z'_2 - z'_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Это показывает, что кинематическая конфигурация тела, движущегося равномерно и прямолинейно по отношению к некоторой системе отсчета, зависит от скорости v поступательного движения. Более того, кинематическая конфигурация отличается от геометрической только сокращением размеров в направлении движения в отношении $1 : \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Относительное движение двух систем со скоростью v , большей скорости света в пустоте, несовместимо с принятыми нами принципами.

В полученных выше уравнениях нетрудно узнать гипотезу Лоренца и Физдженеральда (§ 3). Эта гипотеза казалась нам странной, и ввести ее было необходимо для того, чтобы иметь возможность объяснить отрицательный результат эксперимента Майкельсона и Морли. Здесь эта гипотеза выступает как естественное следствие принятых нами принципов.

2. Рассмотрим часы H' , находящиеся в начале координат системы S' и идущие в p_0 раз быстрее часов, используемых для определения физического времени в системах S или S' . Иначе говоря, при сравнении часов, когда они находятся в относительном покое, часы H' покажут p_0 единиц времени за единицу времени, отсчитанную другими часами. Сколько единиц времени покажут часы H' за единицу времени, если вести наблюдение из системы S ?

Часы H' отметят концы периодов в моменты

$$t'_1 = \frac{1}{p_0}, \quad t'_2 = \frac{2}{p_0}, \quad t'_3 = \frac{3}{p_0}, \quad \dots, \quad t'_n = \frac{n}{p_0}.$$

Так как мы определяем время по отношению к системе S , первая из формул преобразования (I) должна иметь следующий вид:

$$t = \beta \left(t' - \frac{v}{c^2} x' \right),$$

и так как часы H' все время остаются в начале координат S' , то

$$x' = 0,$$

что дает

$$t_n = \beta t'_n = \frac{\beta}{p_0} n.$$

Итак, если вести наблюдение из системы S , часы H' покажут за единицу времени

$$p = \frac{p_0}{\beta} = p_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

периодов. Другими словами, если наблюдать часы из системы, по отношению к которой они равномерно движутся со скоростью v , то окажется, что они идут в $1 : \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ раз медленнее, чем те же часы, неподвижные по отношению к этой системе.

Остановимся на одном интересном применении предыдущей формулы. В 1907 году¹ Штарк обратил внимание на то, что спектральные линии, которые излучают ионы каналовых лучей, наводят на мысль о чем-то подобном явлению Допплера, т. е. о смещении спектральных линий, вызываемом движением источника.

Поскольку колебательные явления, вызывающие возникновение спектральных линий, должны рассматриваться как внутриатомные явления, частота которых определяется только природой ионов, мы можем использовать эти ионы как часы. Частота ρ_0 колебательного движения ионов дает нам возможность измерять время. Найти эту частоту можно, наблюдая спектр, который дают ионы того же типа, находящиеся, однако, в покое относительно наблюдателя. Предыдущая формула показывает, что помимо явления, известного под названием явления Допплера, на источник влияет движение, уменьшающее видимую частоту линий.

3. Рассмотрим уравнения движения точки, движущейся относительно S' равномерно со скоростью u .

$$\begin{aligned}x' &= u_x t', \\y' &= u_y t', \\z' &= u_z t'.\end{aligned}$$

Если, воспользовавшись соотношениями (I) вместо x', y', z', t' подставить сюда их выражения через x, y, z, t , то получим x, y, z как функции t и, следовательно, компоненты u_x, u_y, u_z скорости u и точки по отношению к системе S . Таким образом, можно получить формулу, которая выражает теорему сложения скоростей в ее общем виде, и тогда немедленно станет ясным, что закон параллелограмма скоростей применим лишь как первое приближение. В частном случае, когда скорость u' имеет то же направление, что и скорость v поступательного движения S' относительно S , легко получить, что

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}}. \quad (7)$$

¹J. Stark. Ann. Phys., 1907, 21, 401.

Из этого соотношения видно, что при сложении двух скоростей, меньших скорости света в пустоте, результирующая скорость всегда меньше скорости света. Действительно, если взять $v = c - \lambda$, $u' = c - \mu$, где λ и μ положительны и меньше c , то

$$u = c \cdot \frac{2c - \lambda - \mu}{2c - \lambda - \mu + \frac{\mu\lambda}{c}} < c.$$

Кроме того, отсюда следует, что, складывая скорость света со скоростью, меньшей c , мы всегда получаем скорость света. Теперь можно понять, почему Физо для суммы скорости света в жидкости u' и скорости v жидкости в трубе не получил величины $u' + v$ (§ 2). В самом деле, пренебрегая членами высшего по сравнению с первым порядка малости и заменив отношение c/u' показателем преломления жидкости¹ n , можно переписать соотношение (7) следующим образом:

$$u = u' + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Это соотношение совпадает с тем, которое Физо получил экспериментальным путем.

Из теоремы сложения скоростей непосредственно вытекает и другое следствие, настолько же странное, насколько и интересное. Можно показать, что не существует никакого способа посыпать сигналы, которые распространялись бы быстрее, чем свет в пустоте. Рассмотрим стержень, движущийся равномерно вдоль оси X системы S со скоростью $-v$ ($|v| < c$), с которого можно посыпать сигналы, распространяющиеся по отношению к самому стержню со скоростью u' . Предположим, что в точке $x = 0$ оси X находится наблюдатель A , а в точке $x = x_1$ той же оси находится наблюдатель B . Оба наблюдателя неподвижны в системе S . Если наблюдатель A с помощью этого стержня посыпает в B сигнал, то скорость этого сигнала относительно наблюдателей будет

$$\frac{v - u'}{1 - \frac{vu'}{c^2}}.$$

¹Строго говоря, коэффициент преломления соответствует не показателю преломления жидкости для частоты источника, используемого в эксперименте, но коэффициенту преломления жидкости для частоты, которую измерял бы наблюдатель, движущийся вместе с жидкостью.

Следовательно, время, необходимое сигналу для прохождения пути AB , равно

$$T = x_1 \frac{1 - \frac{vu'}{c^2}}{v - u'},$$

где v может быть любой величиной, меньшей c .

Итак, предположив, что u' больше, чем c , можно всегда выбрать такое v , чтобы T было отрицательным. Иными словами, должно было бы существовать явление, заключающееся в том, что сигнал приходит к месту назначения до того, как он отправлен, т. е. результат предшествовал бы причине. Хотя такой вывод логически возможен, он слишком противоречит всем нашим экспериментальным данным, чтобы поставить под сомнение доказанную невозможность иметь $u' > c$.

4. Теория относительности, построенная на принятых здесь принципах, позволяет найти в общем виде формулы, описывающие явления Допплера и aberrацию. Для этого достаточно сравнить вектор, пропорциональный

$$\sin \omega \left(t - \frac{l x + m y + n z}{c} \right),$$

т. е. вектор плоской световой волны, распространяющейся в пустоте относительно системы S , с вектором, пропорциональным

$$\sin \omega' \left(t' - \frac{l' x' + m' y' + n' z'}{c} \right),$$

т. е. с вектором той же волны относительно системы S' . Заменяя в последнем выражении t' , x' , y' , z' их значениями, полученными из формул преобразования (I), и сопоставляя их с первым выражением, можно найти соотношения, связывающие ω' , l' , m' , n' с ω , l , m , n . Пользуясь этими уравнениями, нетрудно вывести формулы aberrации и эффекта Допплера.

Фундаментальное значение формул преобразования (I) заключается в том, что они дают критерий, позволяющий проверять точность физической теории.

В самом деле, необходимо, чтобы при замене с помощью формул преобразования переменных t , x , y , z переменными t' , x' , y' , z' любое уравнение, выражающее физический закон, преобразовалось бы в уравнение того же вида. Кроме того, зная законы, применяемые к неподвижному телу или к телу, движущемуся с бесконечно малой скоростью,

можно с помощью формул преобразования найти законы, применимые к тому же телу, движущемуся с большой скоростью¹.

§ 8. Замечания о некоторых формальных свойствах уравнений преобразования

Рассмотрим две системы координат Σ и Σ' , которые одинаково ориентированы и имеют общее начало.

В механике Ньютона существует два вида преобразований координат, не изменяющих законы движения.

1. Вращение системы Σ' по отношению к системе Σ вокруг общего начала. Это преобразование характеризуется линейными уравнениями относительно x' , y' , z' и x , y , z , между коэффициентами которых существуют такие соотношения, что условие

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

выполняется тождественно.

2. Равномерное и прямолинейное движение системы Σ' относительно системы Σ . Это преобразование характеризуется уравнениями

$$\begin{aligned} x' &= x + \alpha t, \\ y' &= y + \beta t, \\ z' &= z + \gamma t, \end{aligned} \quad (2)$$

где α , β , γ — постоянные. Для этих двух видов преобразований должно соблюдаться условие

$$t' = t. \quad (3)$$

Иными словами, время при этих преобразованиях должно оставаться неизменным. Комбинируя преобразования (1) и (2), можно получить наиболее общее преобразование, с помощью которого можно

¹Теперь нетрудно понять, что мы имели в виду в § 6, когда говорили о свойствах однородности времени и пространства, т. е. почему мы допускали априори, что уравнения преобразования должны быть линейными. В самом деле, если из системы S наблюдать ход часов, неподвижных относительно S' , то этот ход не должен зависеть ни от того места, где эти часы были помещены в системе S' , ни от времени в системе S' в месте рядом с часами. Аналогичное замечание применимо также к ориентации и длине стержня, связанного с S' и наблюдаемого из системы S . Все эти условия выполняются, если только уравнения преобразования являются линейными.