можно с помощью формул преобразования найти законы, применимые к тому же телу, движущемуся с большой скоростью[1].

## § 8. Замечания о некоторых формальных свойствах уравнений преобразования

Рассмотрим две системы координат $\Sigma$ и $\Sigma'$, которые одинаково ориентированы и имеют общее начало.

В механике Ньютона существует два вида преобразований координат, не изменяющих законы движения.

1. Вращение системы $\Sigma'$ по отношению к системе $\Sigma$ вокруг общего начала. Это преобразование характеризуется линейными уравнениями относительно $x'$, $y'$, $z'$ и $x$, $y$, $z$, между коэффициентами которых существуют такие соотношения, что условие

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

выполняется тождественно.

2. Равномерное и прямолинейное движение системы $\Sigma'$ относительно системы $\Sigma$. Это преобразование характеризуется уравнениями

$$\begin{aligned} x' &= x + \alpha t, \\ y' &= y + \beta t, \\ z' &= z + \gamma t, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — постоянные. Для этих двух видов преобразований должно соблюдаться условие

$$t' = t. \tag{3}$$

Иными словами, время при этих преобразованиях должно оставаться неизменным. Комбинируя преобразования (1) и (2), можно получить наиболее общее преобразование, с помощью которого можно

[1]Теперь нетрудно понять, что мы имели в виду в § 6, когда говорили о свойствах однородности времени и пространства, т. е. почему мы допускали априори, что уравнения преобразования должны быть линейными. В самом деле, если из системы $S$ наблюдать ход часов, неподвижных относительно $S'$, то этот ход не должен зависеть ни от того места, где эти часы были помещены в системе $S'$, ни от времени в системе $S'$ в месте рядом с часами. Аналогичное замечание применимо также к ориентации и длине стержня, связанного с $S'$ и наблюдаемого из системы $S$. Все эти условия выполняются, если только уравнения преобразования являются линейными.

преобразовывать уравнения механики, не изменяя их вида. Это преобразование описывается уравнением (3) и тремя уравнениями, с помощью которых координаты $x'$, $y'$, $z'$ выражаются как линейные функции от $x$, $y$, $z$, $t$; при этом коэффициенты этих трех уравнений связаны между собой соотношениями, которые при $t = 0$ тождественно удовлетворяют условию (1).

Рассмотрим теперь наиболее общие преобразования координат, совместимые с теорией относительности. Исходя из всего предыдущего, это преобразование характеризуется тем, что $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ должны быть такими линейными функциями $x$, $y$, $z$, $t$, чтобы тождественно выполнялось условие

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{a}$$

Необходимо отметить, что преобразования, совместимые с механикой Ньютона, немедленно получаются из соотношения (a), если в нем положить $c = \infty$. Итак, следуя тем путем, которым мы шли раньше, можно получить уравнения обычной кинематики, если вместо принципа постоянства скорости света допустить существование сигналов, не требующих времени для своего распространения.

Группа преобразований, характеризующаяся условием (a), содержит преобразования, соответствующие изменению ориентации системы. Это — преобразования, совместимые с условием

$$t = t'.$$

Наиболее простыми уравнениями, удовлетворяющими условию (a), являются уравнения, для которых две из четырех координат не изменяются. Рассмотрим, например, преобразования, при которых $x$ и $t$ постоянны. В этом случае вместо общего условия (a) мы имеем

$$\begin{cases} t' = t, \\ x' = x, \\ y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2. \end{cases} \tag{a$_1$}$$

Этому условию соответствует вращение системы вокруг оси $X$. Если же мы рассмотрим преобразования, при которых две пространственные координаты, например, $y$ и $z$, остаются неизменными, то получим вместо общего условия (а) частные условия

$$\begin{cases} y' = y, \\ z' = z, \\ x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2. \end{cases} \qquad (\mathrm{a}_2)$$

Это — преобразования, которые мы встретили в предыдущем параграфе, рассматривая систему, равномерно движущуюся параллельно оси $X$ другой неподвижной системы, расположенной таким же образом.

Бросается в глаза формальная аналогия между преобразованиями $(\mathrm{a}_1)$ и $(\mathrm{a}_2)$. Обе системы уравнений отличаются только знаком в третьем условии. Но даже и это различие можно устранить, если здесь, следуя Минковскому[1], в качестве переменной вместо $t$ взять $ict$, где $i$ есть $\sqrt{-1}$. В этом случае мнимая временная координата будет входить в формулы преобразования симметрично с пространственными координатами. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= x_2, \\ z &= x_3, \\ ict &= x_4 \end{aligned}$$

и рассматривать $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ как координаты какой-либо точки четырехмерного пространства так, чтобы любому элементарному событию соответствовала одна точка этого пространства, то все, что происходит в физическом мире, сведется к статике в четырехмерном пространстве. В этом случае условие (а) будет записываться в следующем виде:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Это условие будет соответствовать вращению без относительного поступательного движения четырехмерной системы координат.

Принцип относительности требует, чтобы законы физики не изменялись от вращения четырехмерной системы координат, к которой они отнесены. Четыре координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ должны входить в выражения законов природы симметрично. Для описания различных физических состояний можно пользоваться четырехмерными векторами,

[1] H. Minkowski. Raum und Zeit. Leipzig, 1908. [Русский перевод был опубликован несколько раз; например, в сб. «Принцип относительности». ГТТИ, 1934. — *Прим. ред.*].

которые входят в вычисления точно так же, как и обычные векторы трехмерного пространства.

## § 9. Некоторые применения теории относительности

Применим уравнения преобразования (I) к уравнениям Максвелла – Лоренца, описывающим электромагнитное поле. Пусть $E_x, E_y, E_z$ — компоненты вектора напряженности электрического поля и $M_x$, $M_y$, $M_z$ — компоненты вектора напряженности магнитного поля относительно системы отсчета $S$. Вычисления показывают, что если положить

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & M'_x &= M_x, \\ E'_y &= \beta\left(E_y - \frac{v}{c}M_z\right), & M'_y &= \beta\left(M_y + \frac{v}{c}E_z\right), \\ E'_z &= \beta\left(E_z + \frac{v}{c}M_y\right), & M'_z &= \beta\left(M_z - \frac{v}{c}E_y\right), \end{aligned} \tag{1}$$

то преобразованные уравнения идентичны исходным. Векторы $(E'_x,\ E'_y,\ E'_z)$ и $(M'_x,\ M'_y,\ M'_z)$ в уравнениях, записанных в системе $S'$, играют ту же роль, что и векторы $(E_x,\ E_y,\ E_z)$ и $(M_x,\ M_y,\ M_z)$ в уравнениях, записанных в системе $S$. Отсюда вытекает следующий важный вывод. *Существование электрического поля, равно как и магнитного, зависит от движения системы координат.*

Преобразованные уравнения позволяют определить электрическое поле по отношению к какой-либо системе координат $S'$, движущейся без ускорения, если известно поле относительно другой системы $S$ того же типа.

Эти преобразования были бы невозможны, если бы состояние движения системы координат не входило в определение векторов поля. В этом можно тотчас же убедиться, если рассмотреть определение электрического поля: величина, направление и знак напряженности поля в данной точке определяются величиной пондеромоторной силы, с которой поле действует на единицу количества электричества, предполагаемую сосредоточенной в рассматриваемой точке и *неподвижную по отношению к системе координат.*

Формулы преобразования показывают, что встреченные нами трудности (§ 3), связанные с явлениями, вызванными относительными движениями замкнутого проводника и магнитного полюса, полностью преодолены в новой теории.