В дальнейшем мы, как правило, не будем явно различать геометрическую и кинематическую формы, и высказывание геометрического характера будет относиться к кинематической или геометрической форме в зависимости от того, связано оно с системой отсчета S или нет.

§ 3. Преобразования координат и времени

Пусть S и S' суть равноценные системы отсчета, т.е. пусть эти системы обладают единичными масштабами одинаковой длины и одинаково идущими часами при условии, что масштабы и часы сравниваются друг с другом в состоянии относительного покоя. Тогда очевидно, что любой закон природы, действующий в системе отсчета S, справедлив в точно такой же форме и в системе S', если S и S' находятся в относительном покое. Принцип относительности требует, чтобы это полное совпадение законов распространялось также на случай, когда S' движется равномерно и прямолинейно относительно S. В частности, скорость света в пустоте по отношению к обеим системам должна выражаться одним и тем же числом.

Пусть точечное событие определяется относительно S переменными x, y, z, t и относительно S' — переменными x', y', z', t', причем S и S' движутся относительно друг друга без ускорения. Найдем уравнения, связывающие между собой указанные переменные.

Можно сразу сказать, что эти уравнения должны быть линейными по отношению к указанным переменным, поскольку этого требуют свойства однородности пространства и времени. Отсюда, в частности, следует, что координатные плоскости системы S', отнесенные к системе S, движутся равномерно; однако в общем случае эти плоскости не перпендикулярны друг другу. Если же выбрать положение оси x' так, чтобы ее направление относительно S совпадало с направлением движения S', то из соображений симметрии следует, что координатные плоскости системы S', отнесенные к системе S, должны быть перпендикулярными друг другу. В частности, можно выбрать обе системы координат так, чтобы ось x системы S и ось x' системы S' совпадали и чтобы отнесенная к S ось y' системы S' была параллельна оси y системы S. Далее выберем за начало отсчета времени в обеих системах момент, когда начала координат совпадают; тогда искомые линейные уравнения преобразований будут однородными.

Из известного теперь положения координатных плоскостей системы S' относительно S непосредственно вытекает, что каждые из следующих уравнений попарно эквивалентны:

$$x' = 0 \quad \text{и} \quad x - vt = 0,$$

$$y' = 0 \quad \text{и} \quad y = 0,$$

$$z' = 0 \quad \text{и} \quad z = 0.$$

Следовательно, три искомых формулы преобразований должны иметь вид

$$x' = a(x - vt),$$

$$y' = by,$$

$$z' = cz.$$

Поскольку скорость распространения света в пустоте относительно обеих систем координат равна c, уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad \text{и} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

должны быть эквивалентными.

Отсюда и из только что найденных выражений для x', y', z' после простых вычислений заключаем, что искомые формулы преобразования должны иметь вид

$$t' = \varphi(v) \cdot \beta \cdot \left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

$$x' = \varphi(v) \cdot \beta \cdot (x - vt),$$

$$y' = \varphi(v) \cdot y,$$

$$z' = \varphi(v) \cdot z.$$

При этом введено обозначение

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}.$$

Определим теперь оставшуюся пока неизвестной функцию $\varphi(v)$. Вводя третью систему отсчета S'', эквивалентную S и S', которая движется относительно S' со скоростью $-v$ и ориентирована относительно S' так же, как S' относительно S, после двукратного применения только что полученных формул получаем

$$t'' = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot t,$$
$$x'' = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot x,$$
$$y'' = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot y,$$
$$z'' = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot z.$$

Поскольку начала координат систем S и S'' всегда совпадают, оси одинаково ориентированы и системы «эквивалентны», это преобразование тождественно[1], так что

$$\psi(v)\cdot\varphi(-v) = 1.$$

Далее, поскольку соотношение между y и y' не может зависеть от знака v,

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Следовательно[2], $\varphi(v) = 1$ и формулы преобразования приобретают вид

$$\begin{aligned} t' &= \beta\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big),\\ x' &= \beta(x - vt),\\ y' &= y,\\ z' &= z, \end{aligned} \tag{1}$$

причем

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}.$$

Разрешая соотношения (1) относительно x, y, z, t, нетрудно получить соотношения, отличающиеся только тем, что в них «штрихованные» величины заменены одноименными «нештрихованными» и наоборот, а вместо v стоит $-v$. Это следует непосредственно из принципа относительности и из того, что система S движется равномерно относительно S' в направлении оси x' со скоростью $-v$.

Вообще, в соответствии с принципом относительности, из каждого правильного соотношения между «штрихованными» (определенными

[1]Это заключение основано на физической предпосылке, что длина масштаба, равно как и ход часов, не претерпевают никаких изменений, если масштаб и часы приводятся в движение, а затем возвращаются в состояние покоя.

[2]Случай $\varphi(v) = -1$ нами не рассматривается.

относительно S') и «нештрихованными» (определенными относительно S) величинами или величинами только одного из этих классов опять можно получить правильное соотношение, заменяя нештрихованные величины соответствующими штрихованными и наоборот, а v на $-v$.

§ 4. Следствия из формул преобразования для твердых масштабов и часов

1. Пусть некоторое тело покоится относительно системы отсчета S'. Пусть x_1', y_1', z_1' и x_2', y_2', z_2' — координаты двух его материальных точек, отнесенные к S'. Между координатами этих точек x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 в системе отсчета S во всякое время t в системе S, в соответствии с выведенными в предыдущем параграфе формулами преобразований, существуют соотношения

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \sqrt{1-(v^2/c^2)}(x_2' - x_1'), \\ y_2 - y_1 &= y_2' - y_1', \\ z_2 - z_1 &= z_2' - z_1'. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, кинематическая форма равномерно и прямолинейно движущегося тела зависит от его скорости относительно системы отсчета, причем кинематическая форма тела отличается от его геометрической формы только сокращением в направлении относительного движения в отношении $1 : \sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Относительное движение систем отсчета со сверхсветовой скоростью несовместимо с нашими принципами.

2. Пусть в начале координат системы S' покоятся часы, идущие в ν_0 раз быстрее, чем часы, применяемые для измерения времени в системах S и S', т. е. пусть стрелки этих часов совершают ν_0 оборотов за время одного оборота стрелок покоящихся относительно них часов того же типа, которыми пользуются в системах S и S'. Спрашивается, как идут первые часы, если их рассматривать в системе S?

Стрелки рассматриваемых часов заканчивают оборот в промежутки времени $t_n' = n/\nu_0$, причем n принимает целые значения, и часы постоянно находятся в точке $x' = 0$. Отсюда с помощью двух первых формул преобразований для промежутков времени t_n, в течение которых стрелки часов заканчивают оборот в системе S, получаем

$$t_n = \beta t_n' = \frac{\beta}{\nu_0} n.$$