групповую скорость G можно определить и в том случае, если задана только частота света относительно S, а также скорость движения тела и его природа.

II. Электродинамическая часть

§ 7. Преобразование уравнений Максвелла–Лоренца

Будем исходить из уравнений

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},\\ \frac{1}{c}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x},\\ \frac{1}{c}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y};\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\ \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\ \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.\end{aligned} \tag{6}$$

В этих уравнениях через (X, Y, Z) обозначен вектор напряженности электрического поля, через (L, M, N) — вектор напряженности магнитного поля, через

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

— плотность электрического заряда, умноженная на 4π, и, наконец, через (u_x, u_y, u_z) — вектор скорости электрического заряда.

Эти уравнения вместе с предположением, что электрические заряды постоянно связаны с очень малыми твердыми телами (ионами, электронами), составляют основу лоренцовой электродинамики и оптики движущихся сред.

Пусть эти уравнения выполняются в системе S. Преобразуя их с помощью формул (1) к системе S', движущейся относительно S, как и в предыдущих рассуждениях, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\left\{u'_x\rho' + \frac{\partial X'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}, \\ \frac{1}{c}\left\{u'_y\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial L'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial x'}, \\ \frac{1}{c}\left\{u'_z\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial t'}\right\} &= \frac{\partial M'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial z'}; \end{aligned} \tag{5'}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t'} &= \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial t'} &= \frac{\partial Z'}{\partial x'} - \frac{\partial X'}{\partial z'}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'}. \end{aligned} \tag{6'}$$

При этом введены обозначения

$$\begin{aligned} X' &= X, \\ Y' &= \beta\left(Y - \tfrac{v}{c}N\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \tfrac{v}{c}M\right); \end{aligned} \tag{7а}$$

$$\begin{aligned} L' &= L, \\ M' &= \beta\left(M + \tfrac{v}{c}Z\right), \\ N' &= \beta\left(N - \tfrac{v}{c}Y\right); \end{aligned} \tag{7б}$$

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} = \beta\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)\rho, \tag{8}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}. \tag{9}$$

Полученные уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (5) и (6). С другой стороны, из принципа относительности следует, что электродинамические процессы, отнесенные к системе S', протекают по тем же законам, что и в системе S, Отсюда мы прежде всего заключаем, что величины X', Y', Z' или L', M', N' суть компоненты напряженности электрического или магнитного поля, отнесенные к системе S'.[1] Далее, так как в соответствии с обращенными формулами (3) в соотношениях (9) величины u'_x, u'_y, u'_z равны компонентам скорости электрического заряда относительно S', то ρ' есть плотность электрических зарядов относительно S'. Таким образом, электродинамические основы теории Максвелла–Лоренца соответствуют принципу относительности.

По поводу интерпретации соотношений (7а) можно заметить следующее. Пусть точечный электрический заряд, покоящийся относительно системы S, равен в S «единице», т. е. действует на такой же покоящийся в системе S заряд на расстоянии в 1 см с силой в 1 дин. Согласно принципу относительности, этот электрический заряд будет равен «единице» и в том случае, если он покоится относительно S' и исследуется в системе S'.[2] Если этот электрический заряд покоится относительно S, то, согласно определению, величина (X, Y, Z) представляет собой действующую на него силу, которая может быть измерена, например, пружинными весами, покоящимися относительно системы S. Вектор (X', Y', Z') имеет такой же смысл по отношению к системе S'.

В соответствии с соотношениями (7а) и (7б) напряженность электрического или магнитного поля сама по себе не существует, ибо от выбора системы координат зависит, есть ли в данном месте (точнее, в пространственно-временной окрестности точечного события) электрическое или магнитное поле. Далее можно увидеть, что вводившиеся до настоящего времени «пондеромоторные» силы, действующие на движущиеся в магнитном поле электрические заряды, представляют собой не что иное, как электрические силы, если ввести систему отсчета, покоящуюся относительно рассматриваемого заряда. Поэтому вопросы о локализации этих сил (например, в униполярных машинах) становятся беспредметными; именно, ответ будет различным в зависимости от состояния движения системы отсчета.

---

[1] Совпадение найденных уравнений с уравнениями (5) и (6) оставляет открытой возможность, что величины X' и т. д. отличаются постоянным множителем от векторов поля, отнесенных к системе S'. Однако легко показать, подобно тому как было сделано в § 3 для функции $\varphi(v)$, что этот множитель равен 1.

[2] Этот вывод основывается на предположении, что величина электрического заряда не зависит от предыстории его движения.

Смысл соотношения (8) виден из следующего. Пусть электрически заряженное тело покоится относительно системы S'. Тогда его суммарный заряд относительно S' есть $\varepsilon' = \int(\rho'/4\pi)\,dx'\,dy'\,dz'$. Каков его суммарный заряд ε в определенное время t в системе S? Из трех последних уравнений (1) следует, что для постоянного t справедливо соотношение

$$dx'\,dy'\,dz' = \beta\,dx\,dy\,dz.$$

Соотношение (8) в нашем случае имеет вид:

$$\rho' = \frac{1}{\beta}\rho.$$

Из этих двух равенств следует, что $\varepsilon' = \varepsilon$.

Таким образом, из соотношения (8) следует, что электрический заряд не зависит от состояния движения системы отсчета. Если заряд произвольно движущегося тела остается постоянным с точки зрения движущейся вместе с ним системы отсчета, то он остается постоянным также относительно любой другой системы отсчета.

С помощью формул (1), (7)–(9) каждую задачу электродинамики или оптики движущихся сред можно свести к ряду задач электродинамики или оптики покоящихся сред, если при этом существенную роль играют только скорости, но не ускорения.

Рассмотрим еще один простой пример применения полученных здесь соотношений. Пусть в вакууме распространяется плоская световая волна, которая в системе S описывается уравнениями

$$\begin{gathered}
X = X_0 \sin\Phi, \quad L = L_0 \sin\Phi, \\
Y = Y_0 \sin\Phi, \quad M = M_0 \sin\Phi, \\
Z = Z_0 \sin\Phi, \quad qN = N_0 \sin\Phi, \\
\Phi = \omega\left(t - \frac{lx + my + nz}{c}\right).
\end{gathered}$$

Найдем свойства этой волны в случае, когда она рассматривается в системе S'. Применяя формулы преобразования (1) и (7), получаем

$$\begin{aligned}
X' &= X_0 \sin\Phi', & L' &= L_0 \sin\Phi', \\
Y' &= \beta\left(Y_0 - \tfrac{v}{c}N_0\right)\sin\Phi', & M' &= \beta\left(M_0 + \tfrac{v}{c}Z_0\right)\sin\Phi',
\end{aligned}$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{c}M_0\right)\sin\Phi', \quad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{c}Y_0\right)\sin\Phi',$$

$$\Phi' = \omega'\left(t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c}\right).$$

Так как функции X' и т. д. должны удовлетворять уравнениям ($5'$) и ($6'$), то нормаль к фронту волны, вектор напряженности электрического поля и вектор напряженности магнитного поля взаимно перпендикулярны и в системе S', причем два последних вектора равны друг другу. Мы уже рассматривали в § 6 соотношения, вытекающие из тождества $\Phi = \Phi'$; здесь нам предстоит определить еще амплитуду и поляризацию волны в системе S'.

Выберем плоскость XY параллельной нормали к фронту волны и рассмотрим прежде всего случай, когда вектор напряженности электрического поля параллелен оси Z. Тогда мы должны положить

$$X_0 = 0, \quad L_0 = -A\sin\varphi,$$
$$Y_0 = 0, \quad M_0 = -A\cos\varphi,$$
$$Z_0 = A, \quad N_0 = 0,$$

причем φ означает угол между нормалью к фронту волны и осью X. В соответствии с изложенным выше получим

$$X' = 0, \qquad L' = -A\sin\varphi\sin\Phi',$$
$$Y' = 0, \qquad M' = \beta\left(-\cos\varphi + \frac{v}{c}\right)A\sin\Phi',$$
$$Z' = \beta\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right)A\sin\varphi', \quad N' = 0.$$

Следовательно, если A' означает амплитуду волны в системе S', то

$$A' = A\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \tag{10}$$

Для частного случая, когда вектор напряженности *магнитного* поля перпендикулярен направлению относительного движения и нормали к фронту волны, справедливо, очевидно, такое же уравнение. Поскольку общий случай можно получить суперпозицией этих двух частных случаев, при введении новой системы отсчета S' соотношение (10) остается справедливым, и угол между плоскостью поляризации и плоскостью, параллельной нормали к фронту волны и направлению относительного движения, в обеих системах одинаков.