III. Механика материальной точки (электрона)

§ 8. Вывод уравнений движения (медленно ускоряемой) материальной точки или электрона

Пусть в электромагнитном поле движется частица с электрическим зарядом ε (в дальнейшем мы будем называть ее «электроном»), о законе движения которой мы предположим следующее.

Если электрон в определенный момент времени покоится в (неускоренной) системе S', то его движение в S' происходит в дальнейшем в соответствии с уравнениями

$$\mu \frac{d^2 x_0'}{dt'^2} = \varepsilon X', \qquad \mu \frac{d^2 y_0'}{dt'^2} = \varepsilon Y', \qquad \mu \frac{d^2 z_0'}{dt'^2} = \varepsilon Z',$$

причем через x_0', y_0', z_0' обозначены координаты электрона относительно S', а через μ — постоянная, которую мы назовем массой электрона.

Введем систему S, движущуюся относительно S', как в предыдущих наших исследованиях, и преобразуем наши уравнения движения с помощью формул преобразования (1) и (7а). Первые из этих формул в нашем случае принимают вид

$$\begin{aligned} t' &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x_0\right), \\ x_0' &= \beta(x_0 - vt), \\ y_0' &= y, \\ z_0' &= z. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $\dfrac{dx_0}{dt} = \dot{x}_0$ и т. д., из этих уравнений получаем

$$\frac{dx_0'}{dt'} = \frac{\beta(\dot{x}_0 - v)}{\beta\left(1 - \dfrac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)} \quad \text{и т. д.,}$$

$$\frac{d^2 x_0'}{dt'^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx_0'}{dt'}\right)}{\beta\left(1 - \dfrac{v x_0'}{c^2}\right)} = \frac{1}{\beta}\frac{\left(1 - \dfrac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)\ddot{x}_0 + (\dot{x}_0 - v)\dfrac{v\ddot{x}_0}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)} \quad \text{и т. д.}$$

Вводя эти выражения в написанные выше уравнения, подставляя $\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ и заменяя одновременно X', Y', Z' с помощью формул (7a), получаем

$$\mu\beta^3\ddot{x}_0 = \varepsilon X, \qquad \mu\beta\ddot{y}_0 = \varepsilon\left(Y - \frac{v}{c}N\right), \qquad \mu\beta\ddot{z}_0 = \varepsilon\left(Z + \frac{v}{c}M\right).$$

Эти уравнения являются уравнениями движения электрона для случая, когда в рассматриваемый момент времени $\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$. В левой части этих уравнений вместо v можно ввести скорость q, определенную равенством

$$q = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2},$$

а в правой части заменить v на $\dot{x}_0$. Кроме того, прибавим в соответствующих местах члены, получаемые из $\frac{\dot{x}_0}{c}M$ и $-\frac{\dot{x}_0}{c}N$ циклической перестановкой и обращающиеся в нуль в рассматриваемом частном случае. Опуская индекс у x_0 и т. д., для рассматриваемого частного случая получаем уравнения, эквивалентные написанным выше,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\} &= K_x, \\ \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{y}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\} &= K_y, \\ \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mu\dot{z}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}\right\} &= K_z; \end{aligned} \tag{11}$$

здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} K_x &= \varepsilon\left(X + \frac{\dot{y}}{c}N - \frac{\dot{z}}{c}M\right), \\ K_y &= \varepsilon\left(Y + \frac{\dot{z}}{c}L - \frac{\dot{x}}{c}N\right), \\ K_z &= \varepsilon\left(Z + \frac{\dot{x}}{c}M - \frac{\dot{y}}{c}L\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Эти уравнения не меняют своей формы, если ввести новую, находящуюся в относительном покое систему координат с иначе направленными осями. Поэтому они остаются в силе и в общем случае, а не только при $\dot{x} = \dot{z} = 0$.

Вектор (K_x, K_y, K_z) мы назовем силой, действующей на материальную точку. В случае, когда величина q^2 мала по сравнению с c^2, компоненты K_x, K_y, K_z в соответствии с уравнениями (11) переходят в компоненты силы механики Ньютона. В следующих параграфах будет показано, что этот вектор и в других случаях играет такую же роль в релятивистской механике, какую сила — в классической механике.

Мы будем считать, что уравнения (11) справедливы и в том случае, когда сила, действующая на материальную точку, имеет неэлектромагнитную природу. В этом случае уравнения (11) не имеют физического смысла и их следует рассматривать как определение силы.

§ 9. Движение материальной точки и принципы механики

Умножая уравнения (5) и (6) по порядку на $X/4\pi$, $Y/4\pi$, … , $N/4\pi$ и интегрируя по объему, на границах которого напряженность электрического и магнитного полей равна нулю, получаем

$$\int \frac{\rho}{4\pi c}(u_x X + u_y Y + u_z Z)\, d\omega + \frac{dE_e}{dt} = 0, \tag{13}$$

где

$$E_e = \int \left[\frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2)\right] d\omega$$

есть электромагнитная энергия рассматриваемого объема. В соответствии с законом сохранения энергии первый член соотношения (13) соответствует энергии, передаваемой в единицу времени от электромагнитного поля носителям электрических зарядов. Если электрические заряды жестко связаны с материальной точкой (электроном), то падающая на них часть этой энергии дается выражением

$$\varepsilon(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}),$$

где (X, Y, Z) означает напряженность *внешнего* электрического поля, т. е. поля за вычетом того, которое создается зарядом самого электрона. В силу уравнений (12) это выражение может быть записано в виде

$$K_x\dot{x} + K_y\dot{y} + K_z\dot{z}.$$

Таким образом, вектор (K_x, K_y, K_z), названный в предыдущем параграфе «силой», связан с совершаемой работой так же, как и сила в механике Ньютона.