Вектор (K_x, K_y, K_z) мы назовем силой, действующей на материальную точку. В случае, когда величина q^2 мала по сравнению с c^2, компоненты K_x, K_y, K_z в соответствии с уравнениями (11) переходят в компоненты силы механики Ньютона. В следующих параграфах будет показано, что этот вектор и в других случаях играет такую же роль в релятивистской механике, какую сила — в классической механике.

Мы будем считать, что уравнения (11) справедливы и в том случае, когда сила, действующая на материальную точку, имеет неэлектромагнитную природу. В этом случае уравнения (11) не имеют физического смысла и их следует рассматривать как определение силы.

§ 9. Движение материальной точки и принципы механики

Умножая уравнения (5) и (6) по порядку на $X/4\pi$, $Y/4\pi$, ... , $N/4\pi$ и интегрируя по объему, на границах которого напряженность электрического и магнитного полей равна нулю, получаем

$$\int \frac{\rho}{4\pi c}(u_x X + u_y Y + u_z Z)\, d\omega + \frac{dE_e}{dt} = 0, \tag{13}$$

где

$$E_e = \int \left[\frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2)\right] d\omega$$

есть электромагнитная энергия рассматриваемого объема. В соответствии с законом сохранения энергии первый член соотношения (13) соответствует энергии, передаваемой в единицу времени от электромагнитного поля носителям электрических зарядов. Если электрические заряды жестко связаны с материальной точкой (электроном), то падающая на них часть этой энергии дается выражением

$$\varepsilon(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}),$$

где (X, Y, Z) означает напряженность *внешнего* электрического поля, т. е. поля за вычетом того, которое создается зарядом самого электрона. В силу уравнений (12) это выражение может быть записано в виде

$$K_x\dot{x} + K_y\dot{y} + K_z\dot{z}.$$

Таким образом, вектор (K_x, K_y, K_z), названный в предыдущем параграфе «силой», связан с совершаемой работой так же, как и сила в механике Ньютона.

Следовательно, если уравнения (11) умножить соответственно на x, y, z, сложить и проинтегрировать по времени, то в результате должны получить кинетическую энергию материальной точки (электрона). В самом деле,

$$\int (K_x\dot{x} + K_y\dot{y} + K_z\dot{z})\,dt = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} + \text{const}. \tag{14}$$

Тем самым показано, что уравнения движения (11) удовлетворяют закону сохранения энергии. Покажем теперь, что они соответствуют также закону сохранения количества движения.

Умножая второе и третье из уравнений (5) и второе и третье из уравнений (6) соответственно на $N/4\pi$, $-M/4\pi$, $-Z/4\pi$, $Y/4\pi$, складывая и интегрируя по объему, на границах которого напряженность поля обращается в нуль, получаем

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN - ZM)\,d\omega\right] + \int \frac{\rho}{4\pi}\left(X + \frac{u_y}{c}N - \frac{u_z}{c}M\right)d\omega = 0, \tag{15}$$

или, в соответствии с уравнениями (12),

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN - ZM)\,d\omega\right] + \sum K_x = 0. \tag{15а}$$

Если электрические заряды прикреплены к движущейся материальной точке (электрону), это соотношение в силу уравнений (11) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN - ZM)\,d\omega\right] + \sum \frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} = 0. \tag{15б}$$

Это соотношение вместе с получаемыми из него путем циклической перестановки соотношениями выражает закон сохранения количества движения в рассматриваемом здесь случае. Следовательно, величина $\xi = \dfrac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}}$ играет роль количества движения материальной точки, и в соответствии с уравнениями (11), как и в классической механике, имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = K_x.$$

Возможность введения количества движения материальной точки основана на том, что силу в уравнениях движения, или второй член соотношения (15), можно представить в виде производной по времени.

Далее непосредственно видно, что нашим уравнениям движения материальной точки можно придать форму уравнений Лагранжа, ибо в соответствии с уравнениями (11)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right] = K_x \quad \text{и т. д.},$$

причем здесь введено обозначение

$$H = -\mu c^2\sqrt{1-(q^2/c^2)} + \text{const}.$$

Уравнения движения можно представить также в виде принципа Гамильтона

$$\int\limits_{t_0}^{t}(dH + A)\,dt = 0,$$

причем время t, начальное и конечное положения не варьируются; здесь A означает виртуальную работу

$$A = K_x\delta x + K_y\delta y + K_z\delta z.$$

Наконец, составим также канонические уравнения движения (уравнения Гамильтона). Для этого надо ввести «импульсные переменные» (составляющие количества движения) ξ, η, ζ, причем, как и выше,

$$\xi = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-(q^2/c^2)}} \quad \text{и т. д.}$$

Если кинетическую энергию L рассматривать как функцию ξ, η, ζ и ввести обозначение $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2$, то получим

$$L = \mu c^2\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\mu^2c^2}} + \text{const},$$

и уравнения Гамильтона примут вид

$$\frac{d\xi}{dt} = K_x, \qquad \frac{d\eta}{dt} = K_y, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = K_z,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \xi}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \eta}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \zeta}.$$