имеют точного смысла и законы природы, в которые входят эти координаты.

Все это ставит под сомнение правильность изложенных выше рассуждений об общей относительности. На самом деле для точного применения общего принципа относительности требуется точный обходной путь. Последующим изложением читатель должен быть подготовлен к нему.

## § 24. Евклидов и неевклидов континуум

Пусть передо мной поверхность мраморного стола. Я могу перейти от какой-либо точки поверхности к любой другой точке, переходя большое число раз к «соседним» точкам, или, другими словами, переходя от точки к точке без «скачков». Читатель, по-видимому, достаточно ясно понимает (если только он не очень придирчив), что означает здесь понятие «соседний» и «скачки». Эту же мысль мы выражаем, утверждая, что поверхность представляет собою континуум.

Теперь представим себе большое количество небольших по сравнению с размерами стола линеек одинаковой длины; это значит, что концы любой пары линеек совпадают при наложении. Расположим на поверхности стола четыре линейки таким образом, чтобы они образовали четырехугольник, диагонали которого равны между собой (квадрат). Чтобы обеспечить равенство диагоналей, мы пользуемся контрольной линейкой. К этому квадрату мы подстраиваем такие же квадраты, имеющие одну общую сторону с первым; таким же образом рядом с этими последними квадратами строим новые и т. д. В конце концов вся поверхность стола будет покрыта квадратами, причем каждая сторона является общей для двух квадратов и каждая вершина — для четырех квадратов.

То, что это можно сделать без больших трудностей, — истинное чудо! Достаточно только подумать о следующем. Если в некоторой вершине уже сходятся три квадрата, то тем самым уже имеются две стороны четвертого квадрата. Этим уже полностью определено, как должны быть уложены остальные две стороны. Но теперь я уже не могу составить четырехугольник так, чтобы его диагонали были равны. Если они уже равны сами по себе, то это объясняется особо благоприятными свойствами стола и линеек, которым я могу только удивляться! С подобным чудом мы должны были сталкиваться неоднократно, если это построение нам удалось довести до конца.

Если все это удалось действительно гладко, то можно утверждать, что точки поверхности стола образуют евклидов континуум относительно использованных линеек в качестве отрезков. Взяв вершину одного из квадратов за «начальную точку», я могу охарактеризовать любую другую вершину одного из квадратов по отношению к начальной точке двумя числами. Чтобы достигнуть рассматриваемой вершины квадрата, я должен указать, сколько линеек я должен отложить «вправо» и сколько — «вверх» от начальной точки. Тогда эти два числа и будут представлять собой «декартовы координаты» указанной вершины относительно определяемой уложенными линейками «декартовой системы координат».

То, что существуют случаи, когда подобный эксперимент не удается, можно увидеть, несколько изменив этот мысленный эксперимент. Как известно, линейки должны «удлиняться» в зависимости от температуры. Пусть крышка стола нагрета в середине, а по краям остается ненагретой, причем любые две наши линейки по-прежнему могут быть совмещены друг с другом в любом месте стола. Но при этом наша конструкция из квадратов неизбежно должна расстроиться, так как линейки в середине стола удлинились, а линейки у краев стола — нет.

По отношению к нашим линейкам, определенным в качестве единиц длины, поверхность стола уже не будет евклидовым континуумом, и мы уже не в состоянии непосредственно определить с ее помощью декартовы координаты, так как вышеописанное построение более невыполнимо. Однако имеются другие предметы, на которые температура стола влияет иначе, чем на наши линейки (или вовсе не влияет), и, следовательно, можно естественным путем сохранить представление о поверхности стола как об «евклидовом континууме»; это может быть достигнуто удовлетворительным образом более тонким определением понятия измерения, т. е. сравнения отрезков.

Но если бы длина линеек любого рода, т. е. из любых материалов, *одинаковым образом* зависела от температуры на неодинаково нагретой поверхности стола, и если бы у нас не было другого средства установить влияние температуры, кроме геометрических свойств линеек при опытах, аналогичных описанному выше, то было бы целесообразно принять за единицу расстояние между двумя точками на поверхности стола, если концы одной из наших линеек совпадают с этими точками. В самом деле, как можно было бы иначе определить отрезок без явного произвола? Однако в таком случае мы должны отказаться от метода декартовых координат и заменить его другим методом, который не предполагал бы применимости евклидовой геометрии к твердым телам[1]. Читатель замечает, что описанное здесь положение соответствует тому, которое привело к общему принципу относительности (см. § 23).

## § 25. Гауссовы координаты

Аналитико-геометрический метод рассмотрения может быть, согласно Гауссу, описан следующим образом. Представим себе, что на поверхность стола нанесена система некоторых кривых (см. рис. 4), которые мы назовем $u$-кривыми и пронумеруем их какими-либо числами. На рис. 4 изображены кривые $u = 1$, $u = 2$, $u = 3$. Но между кривыми $u = 1$ и $u = 2$ следует представить себе бесконечно много кривых, которые соответствуют всем вещественным числам между 1 и 2. Тогда получается система $u$-кривых, которые бесконечно плотно покрывают всю поверхность стола. Ни одна кривая $u$ не должна пересекать другую; через каждую точку поверхности стола проходит одна и только одна кривая. Тогда каждой точке поверхности стола соответствует совершенно определенное значение $u$. Начертим на той же поверхности систему $v$-кривых, которые удовлетворяют тем же условиям и обозначены соответствующим образом числами, но также могут

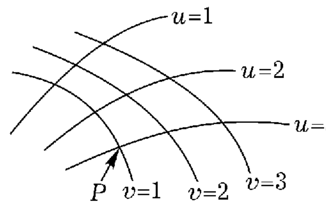


Рис. 4

[1] Математики формулируют нашу задачу следующим образом. Если в трехмерном евклидовом метрическом пространстве дана некоторая поверхность, например, эллипсоид, то на этой поверхности, так же как на плоскости, выполняется двумерная геометрия. Гаусс поставил перед собой задачу исследовать эту двумерную геометрию, не предполагая, что поверхность принадлежит евклидову континууму трех измерений. Если *на этой поверхности* осуществляются построения из жестких линеек (аналогичные описанному выше построению на поверхности стола), то для этих построений выполняются уже иные законы, отличные от законов евклидовой геометрии на плоскости. Поверхность не будет евклидовым континуумом в отношении линеек, и *на поверхности* нельзя определить декартовы координаты. Гаусс показал, на каких принципах может быть основана трактовка геометрических соотношений на поверхности, и тем самым указал путь к риманову методу исследования многомерных неевклидовых континуумов. Таким образом, математиками уже давно решены формальные проблемы, к которым приводит общий принцип относительности.