тода декартовых координат и заменить его другим методом, который не предполагал бы применимости евклидовой геометрии к твердым телам[1]. Читатель замечает, что описанное здесь положение соответствует тому, которое привело к общему принципу относительности (см. § 23).

§ 25. Гауссовы координаты

Аналитико-геометрический метод рассмотрения может быть, согласно Гауссу, описан следующим образом. Представим себе, что на поверхность стола нанесена система некоторых кривых (см. рис. 4), которые мы назовем u-кривыми и пронумеруем их какими-либо числами. На рис. 4 изображены кривые $u = 1$, $u = 2$, $u = 3$. Но между кривыми $u = 1$ и $u = 2$ следует представить себе бесконечно много кривых, которые соответствуют всем вещественным числам между 1 и 2. Тогда получается система u-кривых, которые бесконечно плотно покрывают всю поверхность стола. Ни одна кривая u не должна пересекать другую; через каждую точку поверхности стола проходит одна и только одна кривая. Тогда каждой точке поверхности стола соответствует совершенно определенное значение u. Начертим на той же поверхности систему v-кривых, которые удовлетворяют тем же условиям и обозначены соответствующим образом числами, но также могут

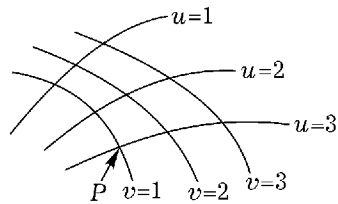

Рис. 4

[1]Математики формулируют нашу задачу следующим образом. Если в трехмерном евклидовом метрическом пространстве дана некоторая поверхность, например, эллипсоид, то на этой поверхности, так же как на плоскости, выполняется двумерная геометрия. Гаусс поставил перед собой задачу исследовать эту двумерную геометрию, не предполагая, что поверхность принадлежит евклидову континууму трех измерений. Если *на этой поверхности* осуществляются построения из жестких линеек (аналогичные описанному выше построению на поверхности стола), то для этих построений выполняются уже иные законы, отличные от законов евклидовой геометрии на плоскости. Поверхность не будет евклидовым континуумом в отношении линеек, и *на поверхности* нельзя определить декартовы координаты. Гаусс показал, на каких принципах может быть основана трактовка геометрических соотношений на поверхности, и тем самым указал путь к риманову методу исследования многомерных неевклидовых континуумов. Таким образом, математиками уже давно решены формальные проблемы, к которым приводит общий принцип относительности.

иметь произвольную форму. Тогда каждой точке поверхности стола соответствует одно значение u и одно значение v; эти два числа мы назовем координатами поверхности стола (гауссовы координаты). Например, точка P на рис. 4 имеет гауссовы координаты $u = 3$, $v = 1$. Тогда две соседние точки P и P' на поверхности соответственно имеют координаты u, v и

$$u + du, \quad v + dv,$$

где du и dv означают весьма малые числа. Расстояние между P и P', измеренное линейкой, также является весьма малым числом ds. Тогда, согласно Гауссу, мы имеем

$$ds^2 = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2,$$

где g_{11}, g_{12}, g_{22} — величины, которые вполне определенным образом зависят от u и v. Величины g_{11}, g_{12} и g_{22} определяют поведение линеек по отношению к u-кривым и v-кривым, а следовательно, по отношению к поверхности стола. Только в том случае, когда точки рассматриваемой поверхности образуют евклидов континуум (по отношению к измерительным линейкам), можно начертить u-кривые и v-кривые и приписать им числа таким образом, что

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

В этом случае u-кривые и v-кривые становятся прямыми линиями в смысле евклидовой геометрии, причем перпендикулярными друг другу. Здесь гауссовы координаты являются просто декартовыми координатами. Гауссовы координаты, очевидно, и есть сопоставление точке рассматриваемой поверхности пары чисел, причем такое, что очень мало различающимся численным значениям однозначно соответствуют соседние точки в пространстве.

Это рассуждение применимо прежде всего к двумерному континууму. Но метод Гаусса может быть применен также к континууму трех, четырех и более измерений. Если, например, имеется четырехмерный континуум, мы можем представить его следующим образом. Каждой точке континуума мы произвольно ставим в соответствие четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4, которые называются «координатами». Соседние точки соответствуют соседним значениям координат. Если соседним точкам P и P' сопоставлено расстояние ds, измеренное и вполне определенное с физической точки зрения, то выполняется следующая формула:

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + \ldots + g_{44}\,dx_4^2,$$

где величины g_{11} и т. д. имеют значения, которые изменяются от точки к точке в континууме. Лишь в том случае, когда континуум является евклидовым, координаты x_1, x_2, x_3, x_4 можно связать с точками континуума так, что мы получаем формулу

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Тогда в четырехмерном континууме выполняются соотношения, которые аналогичны соотношениям, справедливым для измерений в трехмерном пространстве.

Правда, приведенная выше гауссовская трактовка ds^2 не всегда возможна; она возможна лишь в том случае, когда достаточно малые области рассматриваемого континуума можно считать эвклидовыми континуумами. Например, это осуществляется, очевидно, в случае неравномерно нагретой доски стола, температура которой изменяется в зависимости от места. Температура малой части доски стола практически постоянна, и таким образом геометрические свойства линеек *почти* такие, какими они должны быть в соответствии с правилами эвклидовой геометрии. Следовательно, указанные в предыдущем параграфе затруднения в построении квадратов не проявятся четко до тех пор, пока это построение не распространено на значительную часть поверхности стола.

Резюмируя, мы можем сказать следующее: Гаусс предложил метод математического описания любого континуума, в котором определены метрические соотношения («расстояния» между соседними точками). Каждой точке континуума приписывается столько чисел (гауссовых координат), сколько измерений имеет континуум. Способ приписания выбран таким, чтобы он был однозначным и чтобы соседним точкам соответствовали числа (гауссовы координаты), отличающиеся на бесконечно малую величину. Гауссова система координат является логическим обобщением декартовой. Она применима также и к неевклидовым континуумам, но лишь тогда, когда малые по отношению к определенному размеру («расстоянию») части рассматриваемого континуума тем более похожи на эвклидов континуум, чем меньше рассматриваемая часть континуума.