

Приложение I

Простой вывод преобразования Лоренца (дополнение к § 11)

При расположении систем координат, изображенном на рис. 2, оси X обеих систем постоянно совпадают. Мы можем здесь разделить задачу на две части и сначала рассматривать лишь события, локализованные на оси X . Такое событие определяется относительно системы координат K абсциссой x и временем t , а относительно K' — абсциссой x' и временем t' . Требуется найти x' и t' , если даны x и t .

Световой сигнал, распространяющийся в положительном направлении оси X , движется в соответствии с уравнением

$$x = ct,$$

или

$$x - ct = 0. \quad (1)$$

Так как этот же световой сигнал распространяется и относительно K' с той же скоростью c , то его движение относительно системы K' будет описываться уравнением

$$x' - ct' = 0. \quad (2)$$

Пространственно-временные точки (события), удовлетворяющие уравнению (1), должны удовлетворять также уравнению (2). Это, очевидно, будет иметь место в том случае, если вообще выполняется соотношение

$$x' - ct' = \lambda(x - ct), \quad (3)$$

где λ — некоторая постоянная. В самом деле, согласно соотношению (3), обращение в нуль выражения $x - ct$ означает обращение в нуль и $x' - ct'$.

Совершенно аналогичное рассуждение, примененное к световым лучам, распространяющимся в отрицательном направлении оси X , приводит к условию

$$x' + ct' = \mu(x + ct). \quad (4)$$

Складывая и вычитая соотношения (3) и (4) и при этом вводя для удобства вместо постоянных λ и μ , новые постоянные

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}, \quad b = \frac{\lambda - \mu}{2},$$

получаем

$$\begin{aligned}x' &= ax + bct, \\ct' &= act - bx.\end{aligned}\tag{5}$$

Наша задача была бы решена, если бы были известны постоянные a и b ; последние определяются из следующих соображений.

Для начала координат системы K' все время $x' = 0$, следовательно, согласно первому уравнению (5), имеем

$$x = \frac{bc}{a} t.$$

Обозначая через v скорость, с которой начало координат системы K' движется относительно K , находим

$$v = \frac{bc}{a}.\tag{6}$$

То же самое значение v получается из уравнений (5), если вычислять скорость какой-либо другой точки системы K' относительно K или скорость некоторой точки системы K (направленную в сторону отрицательных значений x) относительно K' . Итак, величину v кратко можно назвать относительной скоростью обеих систем.

Далее, из принципа относительности ясно, что с точки зрения системы K длина некоторого единичного масштаба, покоящегося относительно K' , должна быть точно такой же, как и длина такого же масштаба, покоящегося относительно K , с точки зрения системы K' . Чтобы знать, как ведут себя точки оси X' , с точки зрения системы K , нам надо лишь сделать «моментальный снимок» системы K' из системы K ; это значит, что вместо t (время системы K) мы должны подставить некоторое определенное значение его, например, $t = 0$. Тогда из первого уравнения (5) получим

$$x' = ax.$$

Следовательно, две точки оси X' , расстояние между которыми при измерении в системе K' равно 1 ($\Delta x' = 1$), на нашей моментальной фотографии находятся на расстоянии

$$\Delta x = \frac{1}{a}.\tag{7}$$

Но если моментальный снимок делается из системы K' ($t' = 0$), то, исключая t из уравнений (5) при помощи равенства (6), получаем

$$x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x.$$

Отсюда заключаем, что две точки на оси X , находящиеся на расстоянии, равном единице (относительно K), на нашей моментальной фотографии разделены расстоянием

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (7a)$$

Так как, согласно сказанному выше, обе моментальные фотографии должны быть идентичны, то Δx в соотношении (7) должно быть равно $\Delta x'$ в соотношении (7a), так что получаем

$$a^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)}. \quad (7b)$$

Равенства (6) и (7b) определяют постоянные a и b . Подставляя выражения для a и b в уравнения (5), получаем первое и четвертое уравнения, приведенные в § 11:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \\ t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \end{cases} \quad (8)$$

Итак, мы получили преобразование Лоренца для событий на оси X . Оно удовлетворяет условию

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2. \quad (8a)$$

Распространение этого результата на события, происходящие вне оси X , достигается сохранением уравнений (8) и добавлением уравнений

$$\begin{cases} y' = y, \\ z' = z. \end{cases} \quad (9)$$

При этом постулат постоянства скорости света в пустоте остается в силе для световых лучей любого направления как для системы K , так и для системы K' . Это можно показать следующим образом.

Пусть в момент времени $t = 0$ из начала координат системы K посыпается световой сигнал. Он будет распространяться согласно уравнению

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct,$$

или, после возведения этого уравнения в квадрат,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (10)$$

Закон распространения света в соединении с постулатом относительности требует, чтобы упомянутый сигнал — при наблюдении из системы K' — распространялся согласно формуле

$$r' = ct',$$

или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (10a)$$

Чтобы уравнение (10a) было следствием уравнения (10), должно выполняться соотношение:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2). \quad (11)$$

Так как для точек на оси X должно выполняться уравнение (8a), то $\sigma = 1$. Легко убедиться, что преобразование действительно удовлетворяет соотношению (11) при $\sigma = 1$; именно соотношение (11) является следствием соотношения (8a) и уравнений (9), а следовательно, и уравнений (8) и (9). Тем самым преобразование Лоренца выведено.

Преобразование Лоренца, выраженное уравнениями (8) и (9), еще должно быть обобщено. Очевидно, несущественно, что координатные оси системы K были выбраны пространственно параллельными осям системы K' . Несущественно также, что скорость равномерного и прямолинейного движения системы K' относительно K имела направление оси X . Из простого рассуждения следует, что в этом общем случае преобразование Лоренца можно составить из двух преобразований, а именно: из преобразований Лоренца для частного случая и из чисто пространственных преобразований, которые соответствуют переходу

от одной прямоугольной системы координат к другой, с иным направлением осей.

Обобщенное преобразование Лоренца характеризуется математически таким образом.

Оно выражает переменные x' , y' , z' , t' как такие однородные линейные функции переменных x , y , z , t , что тождественно выполняется соотношение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (11a)$$

Это означает: если в левую часть последнего равенства вместо x' , y' , z' , t' подставить их выражения через x , y , z , t , то левая часть равенства (11a) совпадет с правой.

Приложение II Четырехмерный мир Минковского (дополнение к § 17)

Обобщенное преобразование Лоренца может быть охарактеризовано еще проще, если вместо t как переменной времени ввести мнимую величину $\sqrt{-1}ct$. Если в соответствии с этим положить

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= y, \\ x_3 &= z, \\ x_4 &= \sqrt{-1}ct, \end{aligned}$$

и аналогично для системы K' , то условие, которому преобразование тождественно удовлетворяет, будет иметь вид

$$x'_1^2 + x'_2^2 + x'_3^2 + x'_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (12)$$

Именно в это соотношение переходит соотношение (11a) при указанном выборе «координат».

Из соотношения (12) видно, что мнимая временная координата x_4 и пространственные координаты x_1 , x_2 , x_3 входят в него симметрично. На этом основании, согласно теории относительности, «время» x_4 входит в выражение законов природы в такой же форме, что и пространственные координаты x_1 , x_2 , x_3 .