недопустимо, и это может привести к совершенно ошибочным результатам.

Если, например, поток жидкости обтекает тонкую пластинку, установленную вдоль потока (рис. 1.6), то сила воздействия потока на пластинку направлена, очевидно, вдоль потока (она называется в этом случае лобовым сопротивлением) и происходит исключительно от касательных напряжений, приложенных к поверхности пластинки. Нормальные напряжения здесь взаимно уничтожаются и не дают результирующей силы. Пренебрегая в этом случае касательными напряжениями, мы получили бы, что лобовое сопротивление пластинки равно нулю, что совершенно не соответствует действительности.

§ 8. Закон Ньютона для касательных напряжений. Коэффициенты вязкости

Рассмотрим более подробно касательные напряжения в жидкой или газообразной среде. Как уже указывалось в § 4, мы будем считать, что касательные напряжения в жидкостях и газах имеют место только тогда, когда одни частицы жидкости перемещаются относительно других частиц или относительно граничных поверхностей. Естественно предположить, что касательные усилия в жидкостях и газах при прочих равных условиях пропорциональны относительной скорости движения частиц, приходящейся на единицу расстояния между слоями, где находятся эти частицы.

Впервые это было предложено Ньютоном (1687); его гипотеза о внутреннем трении в жидкостях гласит [1]: «Сопротивление, происходящее от недостатка скользкости жидкости при прочих одинаковых условиях, предполагается пропорциональным скорости, с которой частицы жидкости разъединяются друг от друга».

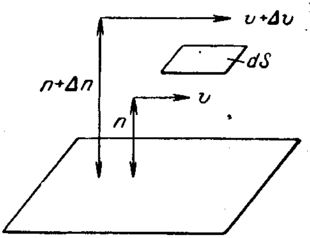

Рис. 1.7. К выводу закона Ньютона для касательных напряжений в газе.

Выразим эту гипотезу в виде математической формулы. Ограничимся здесь простейшим случаем, когда все частицы жидкости движутся параллельно какой-либо плоскости (рис. 1.7). Возьмем сечение, параллельное этой плоскости и находящееся от нее на расстоянии, равном n. Пусть скорость в этом сечении будет v, а в сечении, находящемся от плоскости на расстоянии $n+\Delta n$, скорость будет $v+\Delta v$. Относительная скорость в последнем сечении по отношению к первому равна Δv; так как эта скорость соответствует расстоянию Δn между сечениями, то относительная скорость, приходящаяся на единицу расстояния

[1]) Ньютон И., Математические начала натуральной философии, перевод акад. А. Н. Крылова, Известия Николаевской морской академии, 1915—1916.

по нормали к плоскости, получается равной $\Delta v/\Delta n$. В пределе при $\Delta n \to 0$ мы получаем для исходного сечения величину «скорости, с которой частицы жидкости разъединяются друг от друга»; эта величина равна производной $\partial v/\partial n$. Гипотезу Ньютона можно теперь записать для данного случая в виде равенства

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad (1.\ 3)$$

где μ есть коэффициент пропорциональности, величина которого зависит от природы жидкости, от ее температуры и от давления, под которым жидкость находится. Он называется *коэффициентом вязкости* данной жидкости. Следует отметить, что эта величина размерная: μ, как вытекает из последнего равенства, измеряется в *кг сек*/*м*^{2}. Таким образом, по Ньютону, ***касательное напряжение при движении жидкости параллельными слоями равно произведению коэффициента вязкости на градиент скорости.***

Результаты многочисленных экспериментов, главным образом экспериментов по измерению сопротивления капиллярных трубок, с которыми мы познакомимся в дальнейшем, очень хорошо подтверждают гипотезу Ньютона. Косвенным подтверждением этой гипотезы является также хорошее соответствие с действительностью теории пограничного слоя (гл. VII), в значительной своей части основанной на этой гипотезе. Можно поэтому в настоящее время рассматривать гипотезу Ньютона как физический закон.

Для случая движения газа закон Ньютона может быть выведен из обычных предположений кинетической теории газов. Этот вывод интересен еще и тем, что вскрывает физическую природу происхождения вязкости в газообразной среде и позволяет теоретически определить коэффициент вязкости.

Выделим в потоке два соседних слоя, параллельных плоскости движения и текущих со скоростями v и $v + \Delta v$. Расстояние между наружными границами этих слоев Δn для простоты рассуждений возьмем равным средней длине l свободного пробега молекул; при таком выборе Δn молекулы, переходящие из одного слоя в другой, будут иметь в среднем одно столкновение с молекулами другого слоя и, таким образом, изменят свое количество движения до величины, присущей молекулам другого слоя. На общей границе двух рассматриваемых слоев выделим элементарную площадку dS и подсчитаем изменение количества движения этих слоев за единицу времени, происходящее от диффузии молекул сквозь площадку dS. Обозначим среднее количество молекул в единице объема газа через N, их среднюю скорость — через c. Примем для простоты дальнейших рассуждений, что в среднем в единице объема газа $N/3$ молекул движется вдоль оси a, $N/3$ — вдоль оси b и $N/3$ — вдоль оси n. Нас будет интересовать, очевидно, $N/3$ молекул, движущихся вдоль оси n, ибо они переносят количество движения из одного слоя в другой. Примем далее, что половина этого количества, т. е. $N/6$ молекул, движется снизу вверх и половина, т. е. $N/6$, — сверху вниз. Если обозначить среднюю массу молекулы через m, то общая масса молекул, перешедших за единицу времени из нижнего слоя в верхний сквозь площадку dS, будет равна $NmcdS/6$; эта масса будет нести с собой количество движения, проекция которого на ось a равна $\frac{1}{6} NmcdSv$. Сталкиваясь с молекулами верхнего слоя и приобретая в результате скорость $v + dv$, эти молекулы изменяют количество движения верхнего слоя на величину, равную $\frac{1}{6} NmcdS\,\Delta v$ (при положительном Δv они уменьшают количество движения верхнего слоя). Точно так же найдем, что молекулы, перешедшие за то же время из верхнего слоя в нижний, несут с собой в направлении оси a количество движения, равное $\frac{1}{6} Nmc\,(v + \Delta v)\,dS$. Заменяя молекулы, перешедшие в верхний слой, они увеличат (при положительном Δv) количество движения нижнего слоя на величину $\frac{1}{6} Nmc\,dS\,\Delta v$.

Суммарное изменение количества движения слоев вдоль оси a от диффузии молекул через площадку dS будет за единицу времени равно $\frac{1}{3} Nmc\,dS\,\Delta v$. Вследствие этого изменения появляется сила dT, приложенная к площадке dS, которая для нижнего слоя направлена в сторону положительных a, для верхнего — в сторону отрицательных. Верхний и нижний слои действуют, таким образом, друг на друга с силой, равной по величине, но противоположной по знаку; для площадки dS сила трения равна

$$dT = \frac{1}{3} Nm\,c\,dS\,\Delta v = \frac{1}{3} Nm\,cdS \frac{dv}{dn}\,dn = \frac{1}{3} Nmc\,l \frac{dv}{dn}\,dS.$$

Отсюда получаем величину касательного напряжения между слоями

$$\tau = \frac{dT}{dS} = \frac{1}{3} Nm\,cl \frac{dv}{dn}.$$

Так как произведение Nm представляет собою массу единицы объема газа, т. е. численно равно плотности ρ, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\tau = \frac{1}{3} \rho\,cl \frac{dv}{dn}.$$

Более строгие рассуждения, нежели те, которые здесь были изложены, приводят к формуле такого же вида, но с иным численным коэффициентом; именно, оказывается, что

$$\tau = 0{,}499\,\rho cl \frac{dv}{dn}.$$

При выводе последней формулы учитывается распределение скоростей молекул около средней скорости, распределение длины свободного пробега около средней длины, а также влияние основного потока на распределение скоростей среди молекул (если не учитывать влияния потока, то коэффициент в последней формуле получается равным 0,3503).

Выведенная здесь формула для касательного напряжения в газах представляет собой не что иное, как формулу Ньютона. Благодаря этому выводу мы получаем не только физическое объяснение вязкости газа, но одновременно и формулу для коэффициента вязкости μ. Сопоставляя формулу Ньютона с последней, находим:

$$\mu = 0{,}499\,\rho\, cl. \tag{1.4}$$

Средняя длина свободного пробега молекулы, которая входит в последнюю формулу, обратно пропорциональна числу молекул в единице объема и, следовательно, обратно пропорциональна плотности газа. Средняя же скорость движения молекул c от плотности вообще не зависит, а определяется всецело тепловым состоянием газа. Мы приходим, таким образом, к весьма интересному и на первый взгляд парадоксальному выводу: коэффициент вязкости данного газа не зависит от его плотности и, следовательно, не зависит от давления, под которым газ находится. Этот вывод хорошо подтверждается для небольших давлений экспериментальными определениями коэффициента вязкости. Для давлений порядка нескольких атмосфер и выше коэффициент вязкости с увеличением давления возрастает.

Последняя формула для μ позволяет также установить характер изменения вязкости газа при изменении температуры. Средняя скорость теплового движения молекул c с увеличением температуры возрастает; следовательно, при этом возрастает и коэффициент вязкости. Опыт подтверждает и это заключение.

Следует отметить, что для несжимаемых жидкостей наблюдается обратная зависимость: с возрастанием температуры коэффициент вязкости убывает. Это объясняется, как уже указывалось в § 4, тем, что природа вязкости несжимаемых жидкостей иная, нежели газов. В несжимаемых жидкостях молекулы лишены возможности свободно двигаться по всем направлениям, как это имеет место в газе. Они могут лишь колебаться вокруг своего среднего положения. При возрастании температуры колебательное движение молекул усиливается, силы сцепления между ними ослабевают и коэффициент вязкости уменьшается. Коэффициент вязкости несжимаемой жидкости зависит и от давления. При небольших давлениях (приблизительно до 100 *атм*) коэффициент вязкости остается почти постоянным, но при дальнейшем возрастании давления он увеличивается.

Наряду с коэффициентом вязкости μ пользуются также так называемым кинематическим коэффициентом вязкости ν, который представляет собой отношение коэффициента вязкости к плотности жидкости или газа:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Эта величина не характеризует вязкости жидкости: вязкость, как мы знаем, проявляется в касательных напряжениях и, следовательно, характеризуется коэффициентом μ. Кинематический коэффициет вязкости характеризует ускорения частиц, вызванные силами вязкости. В самом деле, если взять отношение касательного напряжения к массе единицы объема, т. е. ускорение, которое от этого напряжения возникает у единицы объема жидкости, то это отношение, равное

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial v}{\partial n} = \nu\frac{\partial v}{\partial n},$$

определяется при равных градиентах скорости величиной кинематического коэффициента вязкости. Кинематический коэффициент вязкости — величина размерная; его размерность *м²/сек*. Как видим, в выражение для размерности ν не входит масса; этим объясняется и название: *кинематический* коэффициент вязкости.

Таблица 2 дает представление о численной величине коэффициентов μ и ν для важнейших жидкостей и газов, с которыми приходится иметь дело в авиации.

Таблица 2

Значения коэффициентов вязкости μ и ν

Несжимаемые жидкости при температуре $t = 15°$ C	μ в *кг сек/м²*	ν в *м²/сек*	Сжимаемые жидкости (газы) при температуре $t = 15°$ C и барометрическом давлении $p = 760$ *мм* рт. ст.	μ в *кг сек/м²*	ν в *м²/сек*
Вода	$10{,}05 \cdot 10^{-5}$	$11{,}45 \cdot 10^{-7}$	Воздух	$1{,}85 \cdot 10^{-6}$	$1{,}45 \cdot 10^{-5}$
Спирт	$12 \cdot 10^{-5}$	$15{,}1 \cdot 10^{-7}$	Водород	$0{,}907 \cdot 10^{-6}$	$9{,}45 \cdot 10^{-5}$
Бензин	от $4 \cdot 10^{-5}$ до $6{,}5 \cdot 10^{-5}$	$8{,}3 \cdot 10^{-7}$	Гелий	$2{,}01 \cdot 10^{-6}$	$10{,}6 \cdot 10^{-5}$
Масло (минеральное)	$9800 \cdot 10^{-5}$	$2300 \cdot 10^{-7}$	Кислород	$1{,}99 \cdot 10^{-6}$	$0{,}14 \cdot 10^{-5}$
Ртуть	$16{,}3 \cdot 10^{-5}$	$1{,}14 \cdot 10^{-7}$	Углекислый газ	$1{,}48 \cdot 10^{-6}$	$0{,}72 \cdot 10^{-5}$
Глицерин	$11\,600 \cdot 10^{-5}$	$8480 \cdot 10^{-7}$			

Для газов теоретическое значение ν, как следует из формулы (1.4), равно

$$\nu = 0{,}499cl.$$

Величина ν для газов существенно зависит от давления, под которым газ находится (с возрастанием давления ν убывает), а также от температуры газа (с возрастанием температуры ν возрастает).

Для несжимаемых жидкостей коэффициент кинематической вязкости, вообще говоря, убывает с возрастанием температуры. В качестве иллюстрации здесь приведен график изменения коэффициента кинематической вязкости воды при изменении температуры (рис. 1.8).

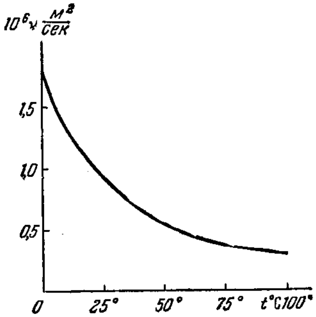

Рис. 1.8. Зависимость коэффициента кинематической вязкости воды от температуры.

Зависимость коэффициента вязкости газа от температуры изображается разными эмпирическими формулами, из которых наиболее часто применяется степенная формула

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n, \qquad (1.5)$$

где n — показатель степени, который при температурах, близких к нормальной, имеет для воздуха значение, равное 0,76. При высоких температурах n в свою очередь зависит от T, несколько уменьшаясь при возрастании T.

Более точной формулой является формула Сэзерленда

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C};$$

для воздуха в этой формуле при $T_0 = 273°$ K коэффициент вязкости μ_0 можно считать равным $1{,}75 \cdot 10^{-6}$ *кг сек/м*^{2}, а константу C можно положить равной 130,5.

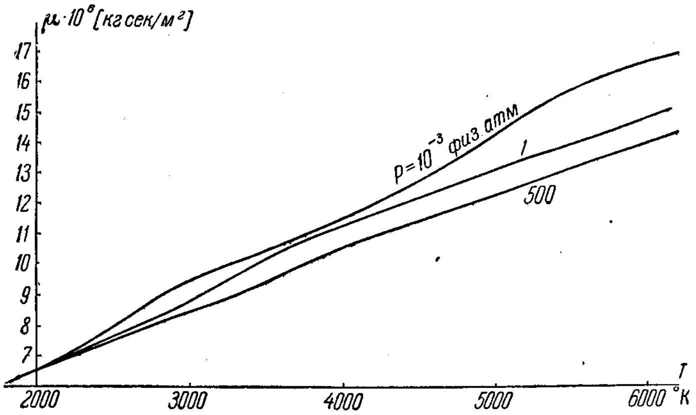

Рис. 1.9. Зависимость коэффициента вязкости воздуха от температуры и давления.

Коэффициент вязкости воздуха при небольших температурах (приблизительно от —100 до 100° С) можно, кроме того, вычислять по формуле Кузнецова

$$\mu_{возд} = 1{,}712 \cdot 10^{-6} + 0{,}0058 \cdot 10^{-6} t,$$

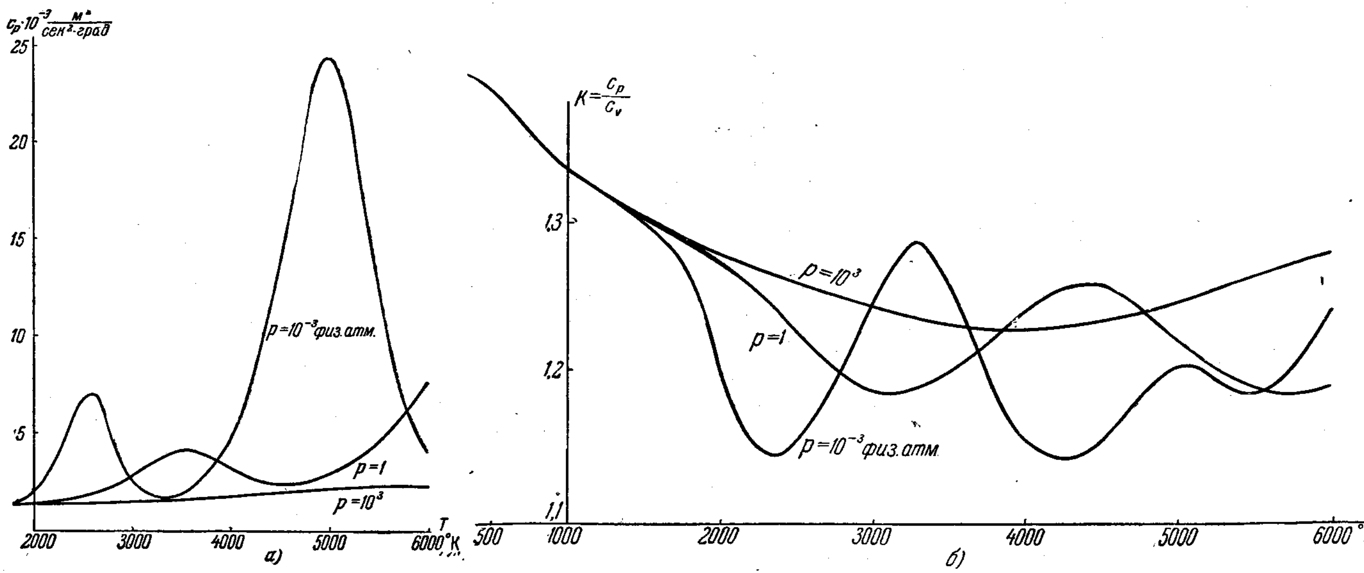

Рис. 1.10. Зависимость *а*) c_p и *б*) $k = c_p/c_v$ от температуры и давления.

где t — температура в градусах Цельсия. При высоких температурах коэффициент вязкости μ, коэффициенты теплоемкости при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v и коэффициент теплопро-

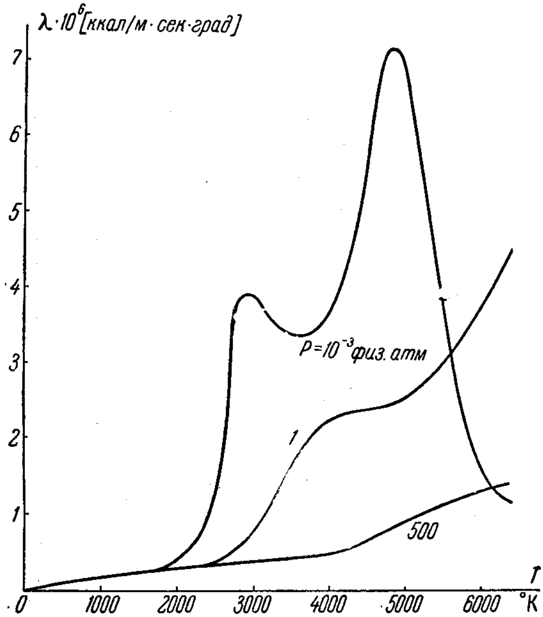

Рис. 1.11. Зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры и давления.

водности λ зависят не только от температуры T, но и от давления p[1]). Зависимости этих величин для воздуха от T при разных давлениях даны на рис. 1.9, 1.10, 1.11.

§ 9. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости. Свойство давлений в покоящейся жидкости

Для того, чтобы лучше уяснить себе природу нормальных напряжений, рассмотрим жидкость в условиях покоя. Важнейшим свойством жидкостей и газов, как уже указывалось в § 4, является то, что касательные напряжения появляются в них только при движении, когда одни части жидкости или газа перемещаются относительно других. В условиях покоя касательные напряжения в жидкости

[1]) См. Кибардин Ю. А. и др., Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока, Госэнергоиздат, 1961.